数　学　I

（全　問　必　答）

第1問　（配点　25）

〔1〕　aを実数とする。xの関数

$$f(x)=(1+2a)(1-x)+(2-a)x$$

を考える。

$$f(x)=\left(-\boxed{\text{ア}}\,a+\boxed{\text{イ}}\right)x+2a+1$$

である。

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$における$f(x)$の最小値は，

$a \leqq \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}$のとき，$\boxed{\text{ウ}}\,a+\boxed{\text{エ}}$であり，

$a > \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}$のとき，$\boxed{\text{オ}}\,a+\boxed{\text{カ}}$である。

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$において，常に$f(x) \geqq \dfrac{2(a+2)}{3}$となる$a$の値の範囲は，

$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \leqq a \leqq \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$である。

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$における$f(x)$の最小値を$g(a)$とおき，aの関数と考える。

aが$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \leqq a \leqq \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$の範囲にあるとき，

$g(a)$の最小値は$\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$であり，$g(a)$の最大値は$\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$である。

（数学I第1問は次ページに続く。）

〔2〕 次の問いに答えよ。必要ならば，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい。

(1) A を有理数全体の集合，B を無理数全体の集合とする。空集合を$\varnothing$と表す。

次の(i)～(iv)が真の命題になるように，$\boxed{\text{ソ}}$ ～ $\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

(i) $A\ \boxed{\text{ソ}}\ \{0\}$　　(ii) $\sqrt{28}\ \boxed{\text{タ}}\ B$

(iii) $A = \{0\}\ \boxed{\text{チ}}\ A$　　(iv) $\varnothing = A\ \boxed{\text{ツ}}\ B$

⓪ $\in$　① $\ni$　② $\subset$　③ $\supset$　④ $\cap$　⑤ $\cup$

(2) 実数 x に対する条件 p，q，r を次のように定める。

p : x は無理数
q : $x + \sqrt{28}$ は有理数
r : $\sqrt{28}\,x$ は有理数

次の $\boxed{\text{テ}}$，$\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

p は q であるための $\boxed{\text{テ}}$。
p は r であるための $\boxed{\text{ト}}$。

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件でない
② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要条件でも十分条件でもない

第2問 (配点　25)

a を 1 以上の定数とし，x についての連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + (20 - a^2)x - 20a^2 \leqq 0 & \cdots\cdots ① \\ x^2 + 4ax \geqq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を考える。

(1) 不等式①の解は $\boxed{\text{アイウ}} \leqq x \leqq a^2$ である。また，不等式②の解は $x \leqq \boxed{\text{エオ}}\,a$，$\boxed{\text{カ}} \leqq x$ である。

この連立不等式を満たす負の実数が存在するような a の値の範囲は

$$1 \leqq a \leqq \boxed{\text{キ}} \qquad \cdots\cdots ③$$

である。

(数学 I 第 2 問は次ページに続く。)

(2)　a が③の範囲にあるとする。この連立不等式の解を数直線上に図示すると，0以上の部分に含まれている線分と0以下の部分に含まれている線分とになる。これらの線分の長さの和は

$$a^2 - \boxed{\text{ク}}\,a + \boxed{\text{ケコ}}$$

である。ただし，ここでは1点からなる集合は長さ0の線分とみなす。この長さの和が最大になるのは $a = \boxed{\text{サ}}$ のときで，その値は $\boxed{\text{シス}}$ である。また，最小になるのは $a = \boxed{\text{セ}}$ のときで，その値は $\boxed{\text{ソタ}}$ である。

第3問 （配点　30）

$\triangle$ABC において，AB $= 4$，BC $= 6$，CA $= \dfrac{10}{3}$ とする。このとき

$$\cos\angle\text{BAC} = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\qquad \sin\angle\text{BAC} = \frac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。また，$\triangle$ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$，$\triangle$ABC の外接円の中心を O とすると，外接円 O の半径は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

（数学Ⅰ第3問は次ページに続く。）

$\angle$BAC の二等分線と外接円 O との交点で A とは異なる点を D とすると，円周角と中心角の関係より

$$\cos \angle \mathrm{BOD} = \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

であるから，$\mathrm{BD} = \boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ である。したがって

$$\frac{\sin \angle \mathrm{BCA}}{\sin \angle \mathrm{BCD}} = \frac{\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

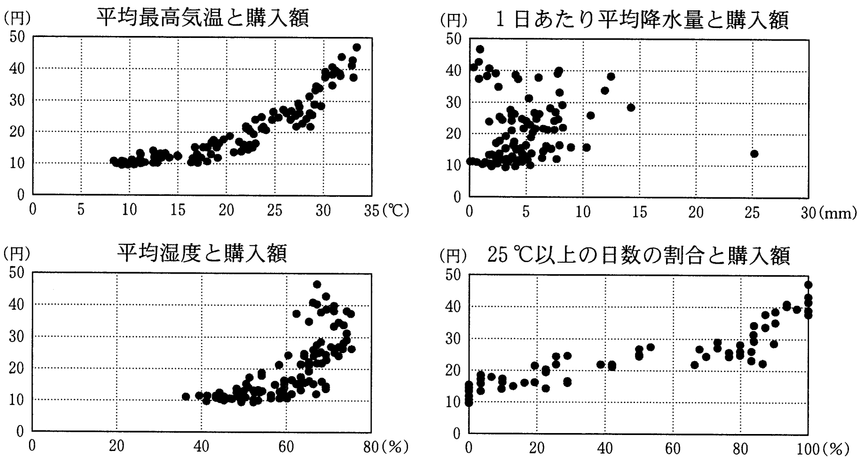
であり

$$\frac{\triangle \mathrm{ABC}\text{ の面積}}{\triangle \mathrm{DBC}\text{ の面積}} = \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$$

である。

第4問 (配点 20)

〔1〕 次の4つの散布図は，2003年から2012年までの120か月の東京の月別データをまとめたものである。それぞれ，1日の最高気温の月平均(以下，平均最高気温)，1日あたり平均降水量，平均湿度，最高気温25℃以上の日数の割合を横軸にとり，各世帯の1日あたりアイスクリーム平均購入額(以下，購入額)を縦軸としてある。



出典：総務省統計局(2013)『家計調査年報』，『過去の気象データ』(気象庁 Webページ)などにより作成

(数学Ⅰ第4問は次ページに続く。)

(1) 次の $\boxed{\text{ア}}$ ， $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～④のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

左のページの散布図から読み取れることとして正しいものは， $\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ である。

⓪ 平均最高気温が高くなるほど購入額は増加する傾向がある。

① 1日あたり平均降水量が多くなるほど購入額は増加する傾向がある。

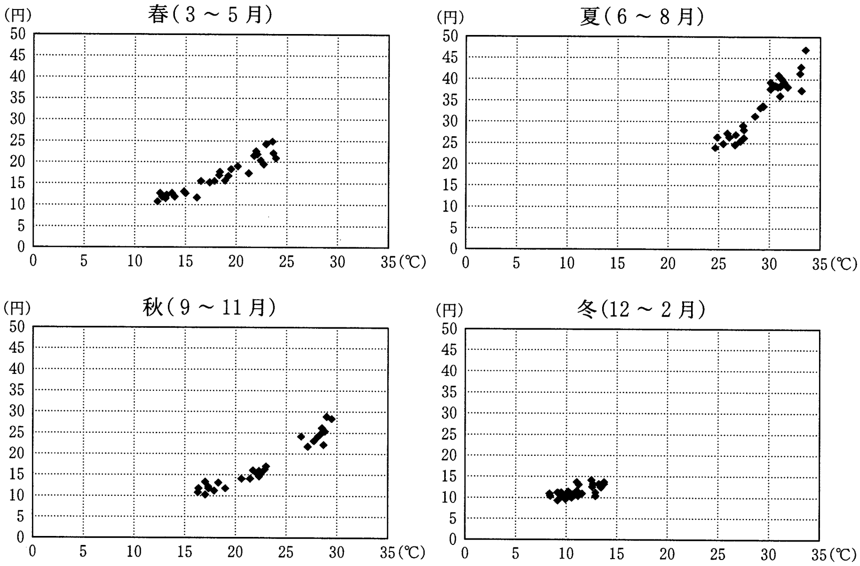
② 平均湿度が高くなるほど購入額の散らばりは小さくなる傾向がある。

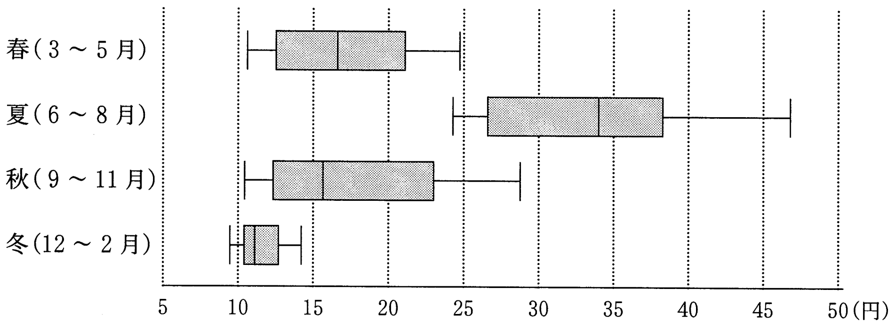
③ 25 ℃以上の日数の割合が 80 ％未満の月は，購入額が 30 円を超えていない。

④ この中で正の相関があるのは，平均湿度と購入額の間のみである。

（数学Ⅰ第4問は次ページに続く。）

(2) 次の4つの散布図は，10ページの散布図『平均最高気温と購入額』のデータを季節ごとにまとめたもので，その下にある4つの箱ひげ図は，購入額のデータを季節ごとにまとめたものである。





出典：総務省統計局(2013)『家計調査年報』，『過去の気象データ』(気象庁Webページ)などにより作成

(数学Ⅰ第4問は次ページに続く。)

次の $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

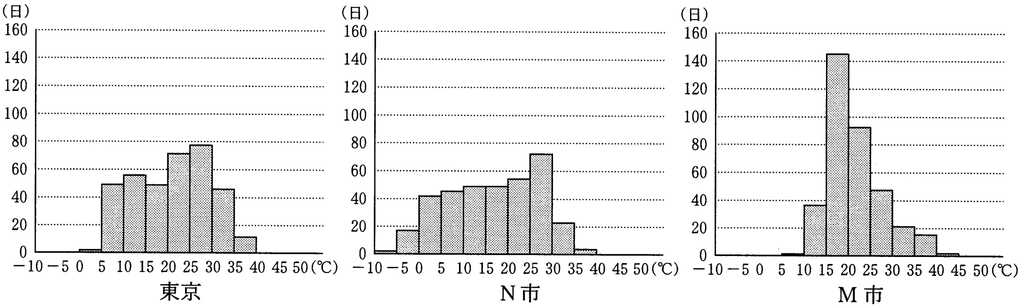
季節ごとの平均最高気温と購入額について，これらの図から読み取れることとして正しいものは， $\boxed{\text{ウ}}$ と $\boxed{\text{エ}}$ である。

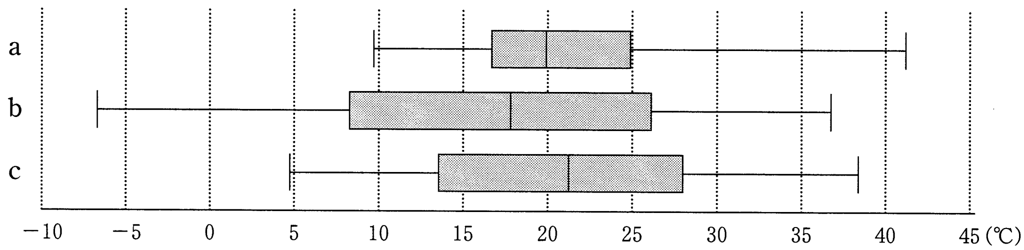
⓪ 夏の購入額は，すべて 25 円を上回っている。
① 秋には平均最高気温が 20 ℃ 以下で購入額が 15 円を上回っている月がある。
② 購入額の範囲が最も大きいのは秋である。
③ 春よりも秋の方が，購入額の最大値は小さい。
④ 春よりも秋の方が，購入額の第 3 四分位数は大きい。
⑤ 春よりも秋の方が，購入額の中央値は大きい。
⑥ 平均最高気温が 25 ℃ を上回っている月があるのは夏だけである。
⑦ 購入額の四分位範囲が最も小さいのは春である。
⑧ 購入額が 35 円を下回っている月は，すべて平均最高気温が 30 ℃ 未満である。

（数学Ⅰ第 4 問は次ページに続く。）

〔2〕 世界4都市(東京，O市，N市，M市)の2013年の365日の各日の最高気温のデータについて考える。

(1) 次のヒストグラムは，東京，N市，M市のデータをまとめたもので，この3都市の箱ひげ図は下のa，b，cのいずれかである。





出典：『過去の気象データ』(気象庁 Web ページ)などにより作成

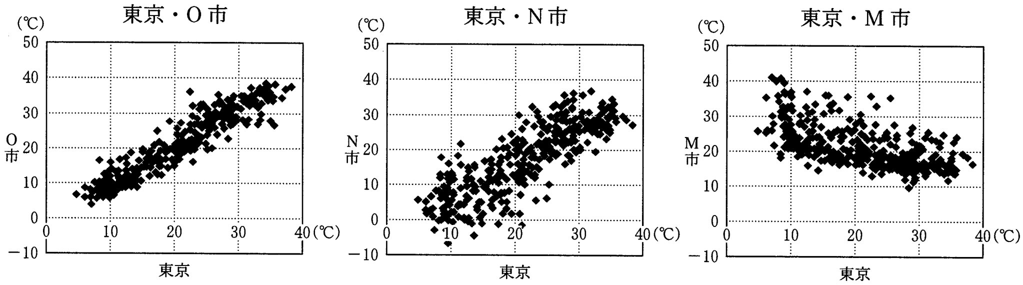
次の $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

都市名と箱ひげ図の組合せとして正しいものは，$\boxed{\textbf{オ}}$ である。

⓪ 東京 — a，N市 — b，M市 — c
① 東京 — a，N市 — c，M市 — b
② 東京 — b，N市 — a，M市 — c
③ 東京 — b，N市 — c，M市 — a
④ 東京 — c，N市 — a，M市 — b
⑤ 東京 — c，N市 — b，M市 — a

(数学 I 第4問は次ページに続く。)

(2) 次の3つの散布図は，東京，O市，N市，M市の2013年の365日の各日の最高気温のデータをまとめたものである。それぞれ，O市，N市，M市の最高気温を縦軸にとり，東京の最高気温を横軸にとってある。



出典：『過去の気象データ』(気象庁 Web ページ)などにより作成

次の カ ， キ に当てはまるものを，下の⓪〜④のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

これらの散布図から読み取れることとして正しいものは， $\boxed{カ}$ と $\boxed{キ}$ である。

⓪ 東京とN市，東京とM市の最高気温の間にはそれぞれ正の相関がある。

① 東京とN市の最高気温の間には正の相関，東京とM市の最高気温の間には負の相関がある。

② 東京とN市の最高気温の間には負の相関，東京とM市の最高気温の間には正の相関がある。

③ 東京とO市の最高気温の間の相関の方が，東京とN市の最高気温の間の相関より強い。

④ 東京とO市の最高気温の間の相関の方が，東京とN市の最高気温の間の相関より弱い。

(数学Ⅰ第4問は次ページに続く。)

(3) 次の $\boxed{\text{ク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

N市では温度の単位として摂氏(℃)のほかに華氏(°F)も使われている。華氏(°F)での温度は，摂氏(℃)での温度を $\frac{9}{5}$ 倍し，32を加えると得られる。例えば，摂氏10℃は，$\frac{9}{5}$ 倍し32を加えることで華氏50°Fとなる。

したがって，N市の最高気温について，摂氏での分散を X，華氏での分散を Y とすると，$\frac{Y}{X}$ は $\boxed{\text{ク}}$ になる。

東京(摂氏)とN市(摂氏)の共分散を Z，東京(摂氏)とN市(華氏)の共分散を W とすると，$\frac{W}{Z}$ は $\boxed{\text{ケ}}$ になる(ただし，共分散は2つの変量のそれぞれの偏差の積の平均値)。

東京(摂氏)とN市(摂氏)の相関係数を U，東京(摂氏)とN市(華氏)の相関係数を V とすると，$\frac{V}{U}$ は $\boxed{\text{コ}}$ になる。

⓪ $-\frac{81}{25}$　① $-\frac{9}{5}$　② -1　③ $-\frac{5}{9}$　④ $-\frac{25}{81}$

⑤ $\frac{25}{81}$　⑥ $\frac{5}{9}$　⑦ 1　⑧ $\frac{9}{5}$　⑨ $\frac{81}{25}$