数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問 （配点　30）

〔1〕

(1)　1 ラジアンとは，$\boxed{\text{ア}}$ のことである。$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　半径が 1，面積が 1 の扇形の中心角の大きさ

①　半径が π，面積が 1 の扇形の中心角の大きさ

②　半径が 1，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ

③　半径が π，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ

(2)　$144°$ を弧度で表すと $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ ラジアンである。また，$\dfrac{23}{12}\pi$ ラジアンを度で表すと $\boxed{\text{エオカ}}°$ である。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(3) $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で

$$2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{30}\right) = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす θ の値を求めよう。

$x = \theta + \dfrac{\pi}{5}$ とおくと，① は

$$2\sin x - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}}\right) = 1$$

と表せる。加法定理を用いると，この式は

$$\sin x - \sqrt{\boxed{\text{ク}}}\cos x = 1$$

となる。さらに，三角関数の合成を用いると

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}\right) = \frac{1}{\boxed{\text{コ}}}$$

と変形できる。$x = \theta + \dfrac{\pi}{5}$，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ だから，$\theta = \dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}\pi$ である。

(数学Ⅱ第１問は次ページに続く。)

〔2〕 c を正の定数として，不等式

$$x^{\log_3 x} \geqq \left(\frac{x}{c}\right)^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を考える。

3 を底とする ② の両辺の対数をとり，$t = \log_3 x$ とおくと

$$t^{\boxed{ソ}} - \boxed{タ}\,t + \boxed{タ}\log_3 c \geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となる。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

$c = \sqrt[3]{9}$ のとき，② を満たす x の値の範囲を求めよう。③ により

$$t \leqq \boxed{チ}, \quad t \geqq \boxed{ツ}$$

である。さらに，真数の条件を考えて

$$\boxed{テ} < x \leqq \boxed{ト}, \quad x \geqq \boxed{ナ}$$

となる。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

次に，② が $x >$ $\boxed{\text{テ}}$ の範囲でつねに成り立つような c の値の範囲を求めよう。

x が $x >$ $\boxed{\text{テ}}$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ニ}}$ である。$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 正の実数全体

① 負の実数全体

② 実数全体

③ 1 以外の実数全体

この範囲の t に対して，③ がつねに成り立つための必要十分条件は，

$\log_3 c \geqq \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。すなわち，$c \geqq \sqrt[\boxed{\text{ノ}}]{\boxed{\text{ハヒ}}}$ である。

第２問 （配点　30）

〔１〕 $p>0$ とする。座標平面上の放物線 $y=px^2+qx+r$ を C とし，直線 $y=2x-1$ を ℓ とする。C は点 A$(1,1)$ において ℓ と接しているとする。

(1) q と r を，p を用いて表そう。放物線 C 上の点 A における接線 ℓ の傾きは $\boxed{\text{ア}}$ であることから，$q=\boxed{\text{イウ}}p+\boxed{\text{エ}}$ がわかる。さらに，C は点 A を通ることから，$r=p-\boxed{\text{オ}}$ となる。

(2) $v>1$ とする。放物線 C と直線 ℓ および直線 $x=v$ で囲まれた図形の面積 S は $S=\dfrac{p}{\boxed{\text{カ}}}\left(v^3-\boxed{\text{キ}}v^2+\boxed{\text{ク}}v-\boxed{\text{ケ}}\right)$ である。

また，x 軸と ℓ および２直線 $x=1$，$x=v$ で囲まれた図形の面積 T は，$T=v^{\boxed{\text{コ}}}-v$ である。

$U=S-T$ は $v=2$ で極値をとるとする。このとき，$p=\boxed{\text{サ}}$ であり，$v>1$ の範囲で $U=0$ となる v の値を v_0 とすると，$v_0=\dfrac{\boxed{\text{シ}}+\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。$1<v<v_0$ の範囲で U は $\boxed{\text{ソ}}$。

$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ つねに増加する　① つねに減少する　② 正の値のみをとる
③ 負の値のみをとる　④ 正と負のどちらの値もとる

$p=\boxed{\text{サ}}$ のとき，$v>1$ における U の最小値は $\boxed{\text{タチ}}$ である。

（数学Ⅱ第２問は次ページに続く。）

〔2〕 関数$f(x)$は$x \geqq 1$の範囲でつねに$f(x) \leqq 0$を満たすとする。$t > 1$のとき，曲線$y = f(x)$とx軸および2直線$x = 1$，$x = t$で囲まれた図形の面積をWとする。tが$t > 1$の範囲を動くとき，Wは，底辺の長さが$2t^2 - 2$，他の2辺の長さがそれぞれ$t^2 + 1$の二等辺三角形の面積とつねに等しいとする。このとき，$x > 1$における$f(x)$を求めよう。

$F(x)$を$f(x)$の不定積分とする。一般に，$F'(x) = \boxed{\text{ツ}}$，$W = \boxed{\text{テ}}$が成り立つ。$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{テ}}$に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $-F(t)$	① $F(t)$	② $F(t) - F(1)$
③ $F(t) + F(1)$	④ $-F(t) + F(1)$	⑤ $-F(t) - F(1)$
⑥ $-f(x)$	⑦ $f(x)$	⑧ $f(x) - f(1)$

したがって，$t > 1$において

$$f(t) = \boxed{\text{トナ}}\,t^{\boxed{\text{ニ}}} + \boxed{\text{ヌ}}$$

である。よって，$x > 1$における$f(x)$がわかる。

第３問 （配点　20）

座標平面上の２点 A$(-1,\ 0)$，B$(2,\ 1)$を通る直線を ℓ_1 とする。また，方程式 $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 36 = 0$ が表す円を C_1 とする。

⑴ ℓ_1 の方程式は $x -$ $\boxed{\text{ア}}$ $y +$ $\boxed{\text{イ}}$ $= 0$ である。また，C_1 の中心は $\left(\boxed{\text{ウエ}},\ \boxed{\text{オ}}\right)$ で，半径は $\boxed{\text{カ}}$ である。

⑵ C_1 上の点 P$(a,\ b)$に対して，三角形 ABP の重心 G の座標を$(s,\ t)$とおくと，$a = \boxed{\text{キ}}\,s - \boxed{\text{ク}}$，$b = \boxed{\text{ケ}}\,t - \boxed{\text{コ}}$ である。したがって，P が C_1 上を動くとき，G の軌跡は中心 $\left(\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}},\ \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\right)$，半径 $\boxed{\text{タ}}$ の円となる。

（数学Ⅱ第３問は次ページに続く。）

⑶　⑵で求めた円を C_2 とする。点 Q が C_2 上を動き，点 R が線分 AB 上を動くとき，線分 QR の長さの最小値と最大値を求めよう。

C_2 の中心を通り，直線 ℓ_1 と垂直な直線 ℓ_2 の方程式は

$$\boxed{\text{チ}}\,x + \boxed{\text{ツ}}\,y - 1 = 0$$

である。ℓ_1 と ℓ_2 の交点は，線分 AB を $1 : \boxed{\text{テ}}$ に内分することがわかる。よって，ℓ_2 は線分 AB と交わるので，QR の長さの最小値は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}} - \boxed{\text{タ}}$$

である。

QR の長さが最大となるときの R の座標は$\left(\boxed{\text{ネ}},\ \boxed{\text{ノ}}\right)$である。したがって，最大値は

$$\frac{\boxed{\text{ハ}}\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{\boxed{\text{フ}}} + \boxed{\text{タ}}$$

である。

第４問 （配点　20）

a，b，c を実数とし，x の整式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

とする。３次方程式 $P(x) = 0$ は虚数 $-1 + \sqrt{6}\,i$ を解にもつとする。

(1)　３次方程式 $P(x) = 0$ の実数解を a を用いて表そう。

$P(x)$ の x に虚数 $-1 + \sqrt{6}\,i$ を代入し，整理すると

$$P(-1 + \sqrt{6}\,i) = \boxed{\text{アイ}}\,a - b + c + \boxed{\text{ウエ}}$$
$$+ \left(\boxed{\text{オカ}}\,a + b - \boxed{\text{キ}}\right)\sqrt{6}\,i$$

となる。したがって，b，c を a を用いて表すと

$$b = \boxed{\text{ク}}\,a + \boxed{\text{ケ}}, \quad c = \boxed{\text{コ}}\,a - \boxed{\text{サシ}}$$

となる。

二つの虚数 $-1 + \sqrt{6}\,i$，$-1 - \sqrt{6}\,i$ を解とする２次方程式で，x^2 の係数が１のものは

$$x^2 + \boxed{\text{ス}}\,x + \boxed{\text{セ}} = 0$$

である。$P(x)$ をこの方程式の左辺の整式で割ると，商は $x + a - \boxed{\text{ソ}}$，余りは $\boxed{\text{タ}}$ である。よって，方程式 $P(x) = 0$ の実数解は

$$x = \boxed{\text{チ}}\,a + \boxed{\text{ツ}}$$

と表せる。

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

⑵ $P(x)$を$x + a - 3$で割ったときの余りが6のとき，$a = \boxed{\text{テ}}$である。

このとき，$P(x)$を2次の整式$Q(x)$で割ったときの商は$x - 1$，余りは$13x + 17$とすると

$$Q(x) = x^2 + \boxed{\text{ト}}\,x + \boxed{\text{ナ}}$$

である。