数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問　（配点　30）

〔１〕

(1)　$\log_{10} 10 = \boxed{\text{ア}}$ である。また，$\log_{10} 5$，$\log_{10} 15$ をそれぞれ $\log_{10} 2$ と $\log_{10} 3$ を用いて表すと

$$\log_{10} 5 = \boxed{\text{イ}} \log_{10} 2 + \boxed{\text{ウ}}$$

$$\log_{10} 15 = \boxed{\text{エ}} \log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \boxed{\text{オ}}$$

となる。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(2) 太郎さんと花子さんは，15^{20} について話している。

以下では，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

太郎：15^{20} は何桁の数だろう。

花子：15 の 20 乗を求めるのは大変だね。$\log_{10} 15^{20}$ の整数部分に着目してみようよ。

$\log_{10} 15^{20}$ は

$$\boxed{\text{カキ}} < \log_{10} 15^{20} < \boxed{\text{カキ}} + 1$$

を満たす。よって，15^{20} は $\boxed{\text{クケ}}$ 桁の数である。

太郎：15^{20} の最高位の数字も知りたいね。だけど，$\log_{10} 15^{20}$ の整数部分にだけ着目してもわからないな。

花子：$N \cdot 10^{\boxed{\text{カキ}}} < 15^{20} < (N+1) \cdot 10^{\boxed{\text{カキ}}}$ を満たすような正の整数 N に着目してみたらどうかな。

$\log_{10} 15^{20}$ の小数部分は $\log_{10} 15^{20} - \boxed{\text{カキ}}$ であり

$$\log_{10} \boxed{\text{コ}} < \log_{10} 15^{20} - \boxed{\text{カキ}} < \log_{10}\left(\boxed{\text{コ}} + 1\right)$$

が成り立つので，15^{20} の最高位の数字は $\boxed{\text{サ}}$ である。

(数学Ⅱ第１問は次ページに続く。)

〔2〕 座標平面上の原点を中心とする半径 1 の円周上に 3 点 P$(\cos\theta, \sin\theta)$, Q$(\cos\alpha, \sin\alpha)$, R$(\cos\beta, \sin\beta)$がある。ただし, $0 \leqq \theta < \alpha < \beta < 2\pi$ とする。このとき, s と t を次のように定める。

$$s = \cos\theta + \cos\alpha + \cos\beta, \quad t = \sin\theta + \sin\alpha + \sin\beta$$

(1) △PQR が正三角形や二等辺三角形のときの s と t の値について考察しよう。

考察 1

△PQR が正三角形である場合を考える。

この場合, α, β を θ で表すと

$$\alpha = \theta + \frac{\boxed{\text{シ}}}{3}\pi, \quad \beta = \theta + \frac{\boxed{\text{ス}}}{3}\pi$$

であり, 加法定理により

$$\cos\alpha = \boxed{\text{セ}}, \quad \sin\alpha = \boxed{\text{ソ}}$$

である。同様に, $\cos\beta$ および $\sin\beta$ を, $\sin\theta$ と $\cos\theta$ を用いて表すことができる。

これらのことから, $s = t = \boxed{\text{タ}}$ である。

$\boxed{\text{セ}}$, $\boxed{\text{ソ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	① $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta$
② $\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	③ $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta$
④ $-\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta$
⑥ $-\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	⑦ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta$

(数学 II 第 1 問は次ページに続く。)

考察 2

△PQR が PQ ＝ PR となる二等辺三角形である場合を考える。

例えば，点 P が直線 $y = x$ 上にあり，点 Q，R が直線 $y = x$ に関して対称であるときを考える。このとき，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ である。また，α は $\alpha < \dfrac{5}{4}\pi$，β は $\dfrac{5}{4}\pi < \beta$ を満たし，点 Q，R の座標について，$\sin\beta = \cos\alpha$，$\cos\beta = \sin\alpha$ が成り立つ。よって

$$s = t = \frac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}} + \sin\alpha + \cos\alpha$$

である。

ここで，三角関数の合成により

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{\boxed{\text{テ}}}\,\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{\boxed{\text{ト}}}\right)$$

である。したがって

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{ナニ}}}{12}\pi,\quad \beta = \frac{\boxed{\text{ヌネ}}}{12}\pi$$

のとき，$s = t = 0$ である。

（数学Ⅱ第 1 問は次ページに続く。）

⑵　次に，s と t の値を定めたときの θ，α，β の関係について考察しよう。

考察 3

$s = t = 0$ の場合を考える。

この場合，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ により，α と β について考えると

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

である。

同様に，θ と α について考えると

$$\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha = \frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

であるから，θ，α，β の範囲に注意すると

$$\beta - \alpha = \alpha - \theta = \frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}\pi$$

という関係が得られる。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(3) これまでの考察を振り返ると，次の⓪～③のうち，正しいものは $\boxed{\text{ホ}}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{ホ}}$ の解答群

⓪ △PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であり，$s=t=0$ ならば △PQR は正三角形である。

① △PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であるが，$s=t=0$ であっても △PQR が正三角形でない場合がある。

② △PQR が正三角形であっても $s=t=0$ でない場合があるが，$s=t=0$ ならば △PQR は正三角形である。

③ △PQR が正三角形であっても $s=t=0$ でない場合があり，$s=t=0$ であっても △PQR が正三角形でない場合がある。

第２問 （配点　30）

〔１〕 a を実数とし，$f(x)=(x-a)(x-2)$ とおく。また，$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ とする。

(1) $a=1$ のとき，$F(x)$ は $x=$ $\boxed{\text{ア}}$ で極小になる。

(2) $a=$ $\boxed{\text{イ}}$ のとき，$F(x)$ はつねに増加する。また，$F(0)=$ $\boxed{\text{ウ}}$ であるから，$a=$ $\boxed{\text{イ}}$ のとき，$F(2)$ の値は $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ 0	① 正	② 負

（数学Ⅱ第２問は次ページに続く。）

(3) $a >$ $\boxed{\text{イ}}$ とする。

b を実数とし，$G(x) = \int_b^x f(t)\,dt$ とおく。

関数 $y = G(x)$ のグラフは，$y = F(x)$ のグラフを $\boxed{\text{オ}}$ 方向に $\boxed{\text{カ}}$ だけ平行移動したものと一致する。また，$G(x)$ は $x =$ $\boxed{\text{キ}}$ で極大になり，$x =$ $\boxed{\text{ク}}$ で極小になる。

$G(b) =$ $\boxed{\text{ケ}}$ であるから，$b =$ $\boxed{\text{キ}}$ のとき，曲線 $y = G(x)$ と x 軸との共有点の個数は $\boxed{\text{コ}}$ 個である。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ x 軸	① y 軸

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ b	① $-b$	② $F(b)$
③ $-F(b)$	④ $F(-b)$	⑤ $-F(-b)$

（数学Ⅱ第２問は次ページに続く。）

〔2〕 $g(x) = |x|(x+1)$ とおく。

点 P$(-1,\ 0)$を通り，傾きが c の直線を ℓ とする。$g'(-1) =$ $\boxed{\text{サ}}$ であるから，$0 < c <$ $\boxed{\text{サ}}$ のとき，曲線 $y = g(x)$ と直線 ℓ は 3 点で交わる。そのうちの 1 点は P であり，残りの 2 点を点 P に近い方から順に Q，R とすると，点 Q の x 座標は $\boxed{\text{シス}}$ であり，点 R の x 座標は $\boxed{\text{セ}}$ である。

（数学Ⅱ第 2 問は次ページに続く。）

また，$0 < c <$ $\boxed{\text{サ}}$ のとき，線分 PQ と曲線 $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積を S とし，線分 QR と曲線 $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$S = \frac{\boxed{\text{ソ}}\,c^3 + \boxed{\text{タ}}\,c^2 - \boxed{\text{チ}}\,c + 1}{\boxed{\text{ツ}}}$$

$$T = c^{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

第3問 (配点　20)

Oを原点とする座標平面上に3点A(5，0)，B(4，3)，C(0，5)があり，四角形OABCの周および内部からなる領域をDとする。

また，直線ABの方程式を$y = m_1 x + n_1$，直線BCの方程式を$y = m_2 x + n_2$とする。

(1) m_1，n_1，m_2，n_2の値はそれぞれ

$$m_1 = \boxed{アイ},\quad n_1 = \boxed{ウエ},\quad m_2 = \frac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}},\quad n_2 = \boxed{ク}$$

である。

(2) 領域Dは，次の連立不等式で表すことができる。

$$y \boxed{ケ} m_1 x + n_1,\quad y \boxed{コ} m_2 x + n_2,\quad x \boxed{サ} 0,\quad y \boxed{シ} 0$$

$\boxed{ケ}$ ～ $\boxed{シ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\leqq$	① $\geqq$	② $=$	③ $<$	④ $>$

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

(3) 点$(x,\ y)$が領域 D 内を動くとき，$y - m_1x$ の最大値を求めるために

$$y - m_1x = k$$

とおく。これは点$(0,\ k)$を通り，傾きが m_1 の直線を表す。このことと $m_1 = \boxed{アイ}$ であることから，点$(x,\ y)$が D 内を動くとき，$y - m_1x$ の最大値が $\boxed{スセ}$ であることがわかる。

また，p を $m_1 < p < m_2$ を満たす定数とすると，点$(x,\ y)$が D 内を動くとき，$y - px$ の最大値は $\boxed{ソタ}\,p + \boxed{チ}$ である。

(4) 点$(x,\ y)$が領域 D 内を動くとき，$(x+3)^2 + y^2$ の最小値と最大値を求めるために

$$(x+3)^2 + y^2 = t$$

とおく。$t > 0$ のとき，これは中心$(-3,\ 0)$，半径 $\sqrt{t}$ の円を表す。このことから，点$(x,\ y)$が D 内を動くとき，$(x+3)^2 + y^2$ の最小値が $\boxed{ツ}$，最大値が $\boxed{テト}$ であることがわかる。

また，点$(x,\ y)$が D 内を動くとき，$(x+4)^2 + (y+3)^2$ の最小値は $\boxed{ナニ}$ であり，最大値は $\boxed{ヌネノ}$ である。

第４問 （配点　20）

k，ℓ，m を実数とし，x の整式 $P(x) = x^4 + kx^2 + \ell x + m$ を考える。

(1) $P(x)$ は $x + 1$ で割り切れるとする。このとき，因数定理により，$P\left(\boxed{\text{アイ}}\right) = 0$ が成り立つから，m は k，ℓ を用いて

$$m = \boxed{\text{ウ}}\,k + \ell - \boxed{\text{エ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表される。また，$P(x)$ を $x + 1$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$Q(x) = x^3 - x^2 + \left(k + \boxed{\text{オ}}\right)x - k + \ell - \boxed{\text{カ}}$$

である。

(2) $P(x)$ は $(x + 1)^2$ で割り切れるとする。このとき，(1) で求めた $Q(x)$ は $x + 1$ で割り切れる。このことと ① により，ℓ，m は k を用いて

$$\ell = \boxed{\text{キ}}\,k + \boxed{\text{ク}}, \quad m = k + \boxed{\text{ケ}}$$

と表される。また，$P(x)$ を $(x + 1)^2$ で割ったときの商を $R(x)$ とすると

$$R(x) = x^2 - \boxed{\text{コ}}\,x + k + \boxed{\text{サ}}$$

である。

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

以下の(3)，(4)では，$P(x)$は$(x+1)^2$で割り切れるとする。

(3) $R(x)$を(2)で求めた2次式とし，2次方程式$R(x)=0$の判別式をDとする。このとき，$P(x)$がつねに0以上の値をとることは，Dの値が $\boxed{\text{シ}}$ であることと同値であり，これは，$k+\boxed{\text{ス}}$ の値が $\boxed{\text{セ}}$ であることと同値である。

$\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{セ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 負	① 0以下	② 0
③ 正	④ 0以上	

(4) tを実数とする。4次方程式$P(x)=0$が虚数解$t+3i$，$t-3i$をもつとき，$t=\boxed{\text{ソ}}$，$k=\boxed{\text{タ}}$ である。