# 数　学　I

（全　問　必　答）

## 第１問　（配点　20）

〔１〕　$k$，$n$ は $n > k^2$ を満たす自然数とする。次の実数

$$\frac{1}{\sqrt{n} - k} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

を考え，その整数部分を $a$ で表す。

(1)　$k = 1$，$n = 3$ の場合を考えよう。
このとき，① の分母を有理化すると

$$\frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}} + \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

となる。したがって，$a = \boxed{\text{エ}}$ である。

(2)　$n = k^2 + 1$ の場合を考えよう。
このとき，① は $\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1} - k}$ となる。この分母を有理化して，$k^2$，$k^2 + 1$，$(k + 1)^2$ の大小を考えると，$a = \boxed{\text{オ}}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $k$ | ① $k + 1$ | ② $k + 2$ |
| ③ $2k$ | ④ $2k + 1$ | ⑤ $k + \sqrt{k^2 + 1}$ |
| ⑥ $k^2 + 1$ | ⑦ $k^2 - k + 2$ | ⑧ $k^2 - 3k + 6$ |

（数学 I 第１問は次ページに続く。）

(3) ① の整数部分 $a$ の値について，$a \geqq k$ となる $n$ の個数を求めよう。
$k$ が自然数であることを考慮すると，$a \geqq k$ であるための必要十分条件は

$$\frac{1}{\sqrt{n}-k} \boxed{\text{カ}} k \qquad \cdots\cdots ②$$

である。② の両辺の逆数をとると

$$\sqrt{n}-k \boxed{\text{キ}} \frac{1}{k} \qquad \cdots\cdots ③$$

となる。③ であるための必要十分条件を，自然数 $m$ を用いて

$$n \boxed{\text{キ}} k^2 + m + \frac{1}{k^2}$$

と表すと，$m = \boxed{\text{ク}}$ である。

したがって，$n > k^2$ に注意すると，次のことがわかる。

- $k = 1$ に対して，$a \geqq k$ となる $n$ の個数は $\boxed{\text{ケ}}$ 個である。
- 2 以上の $k$ に対して，$a \geqq k$ となる $n$ の個数は $\boxed{\text{コ}}$ 個である。

$\boxed{\text{カ}}$ ，$\boxed{\text{キ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $\leqq$ | ① $=$ | ② $\geqq$ |

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ 0 | ① 1 | ② 2 | ③ 3 |
| ④ $k$ | ⑤ $\lvert k-4 \rvert$ | ⑥ $(k^2+2)$ | ⑦ $(k^2-5k+8)$ |

（数学Ⅰ第1問は次ページに続く。）

〔2〕

(1) $U$を全体集合とし，$A$，$B$を$U$の部分集合とする。$U$，$A$，$B$の関係を図1のように表す。例えば，$A\cup B$は，図2の斜線部分となる。

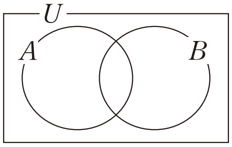



図 1

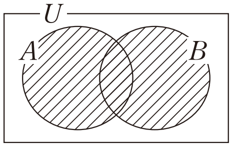
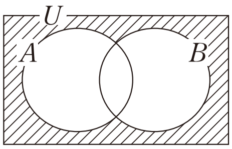



図 2

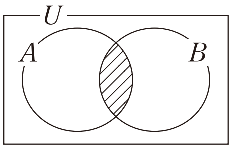
このとき，$\overline{A}\cap B$は $\boxed{\text{サ}}$ の斜線部分であり，$\overline{A}\cap\overline{B}$は $\boxed{\text{シ}}$ の斜線部分である。

$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

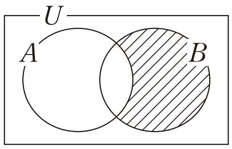
⓪



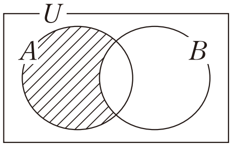

①



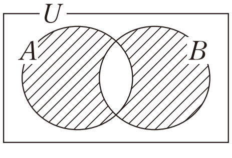

②



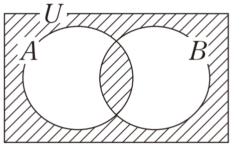

③




④




⑤




（数学Ⅰ第1問は次ページに続く。）

⑵　全体集合 $U$ を $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とする。

(i)　$U$ の部分集合 $A$，$B$ が

$$A\cap B=\{2, 3\},\quad \overline{A}\cap B=\{1, 8\},\quad \overline{A}\cap\overline{B}=\{4, 6, 9\}$$

を満たすとき，$A\cap\overline{B}=\left\{\boxed{\text{ス}}, \boxed{\text{セ}}\right\}$ である。ただし，$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ の解答の順序は問わない。

(ii)　$a$，$b$ を自然数とし

$$C=\{1, 5, 7, a+b\},\quad D=\{5, 8, a-b, b\}$$

を $U$ の部分集合とする。$C$ と $D$ が

$$C\cap\overline{D}=\{7, 9\}$$

を満たすとき，$a$，$b$ の値を求めよう。

$C$ と $C\cap\overline{D}$ の要素に着目すると

$$a+b=\boxed{\text{ソ}},\quad C\cap D=\left\{\boxed{\text{タ}}, \boxed{\text{チ}}\right\}$$

であることがわかる。ただし，$\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$ の解答の順序は問わない。

また，$D=\{5, 8, a-b, b\}$ と $C\cap D=\left\{\boxed{\text{タ}}, \boxed{\text{チ}}\right\}$ より

$$a=\boxed{\text{ツ}},\quad b=\boxed{\text{テ}}$$

であることがわかる。

# 第２問 （配点　30）

〔1〕 $OP = OQ = \sqrt{2}$ である二等辺三角形 OPQ があり，３点 O，P，Q それぞれを中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円 O，P，Q がある。円 P と円 Q の交点のうち，点 O と異なるものを点 A とする。図１のように点 A が円 O の外部にあるとき，三つの円 O，P，Q を合わせてできる図形（図１の太線で囲まれた部分）の面積 $S$ を考えよう。

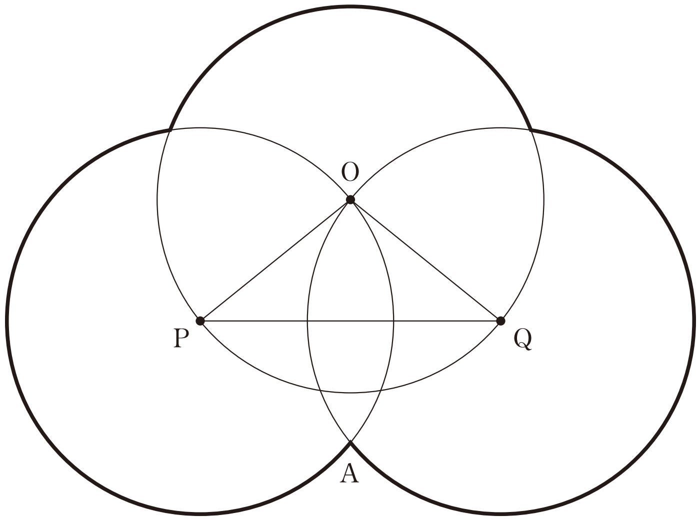



図　1

(1) 四角形 OPAQ の面積を考えよう。$OP = PA = AQ = QO = \sqrt{2}$ であることから，四角形 OPAQ の面積を $\angle POQ$ を用いて表すと，$\boxed{ア}$ である。

$\boxed{ア}$ の解答群

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $\sin \angle POQ$ | ① $\cos \angle POQ$ | ② $\tan \angle POQ$ |
| ③ $2 \sin \angle POQ$ | ④ $2 \cos \angle POQ$ | ⑤ $2 \tan \angle POQ$ |

（数学 I 第２問は次ページに続く。）

(2) 図１のように点Ａが円Ｏの外部にあるための条件について調べよう。

$\angle OPA = \boxed{\text{イ}} - \angle POQ$ であることに注意し，三角形 OPA において余弦定理を用いると

$$OA^2 = \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}} \cos \angle POQ$$

となることがわかる。このことから，点Ａが円Ｏの周上にあるのは $\angle POQ = \boxed{\text{オ}}$ のときである。

したがって，円Ｏと点Ａの位置関係について次のことがわかる。

- $0° < \angle POQ < \boxed{\text{オ}}$ のとき，点Ａは円Ｏの $\boxed{\text{カ}}$ にある。
- $\angle POQ = \boxed{\text{オ}}$ のとき，点Ａは円Ｏの周上にある。
- $\boxed{\text{オ}} < \angle POQ < 180°$ のとき，点Ａは円Ｏの $\boxed{\text{キ}}$ にある。

これにより，点Ａが円Ｏの外部にあるための条件がわかる。

$\boxed{\text{イ}}$ ，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ 45° | ① 60° | ② 90° | ③ 120° |
| ④ 135° | ⑤ 150° | ⑥ 180° | |

$\boxed{\text{カ}}$ ，$\boxed{\text{キ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

| | |
|---|---|
| ⓪ 内　部 | ① 外　部 |

（数学Ｉ第２問は次ページに続く。）

(3) 図 1 のように点 A が円 O の外部にあるとする。さらに，四角形 OPAQ の面積は 1 であるとする。このとき，次の**構想**に基づいて三つの円 O，P，Q を合わせてできる図形の面積 $S$ を求めよう。

**構想**

$S$ を四角形 OPAQ の面積といくつかの三角形および扇形の面積の和で表す。

このとき

$$S = 1 + \sqrt{\boxed{\text{ク}}} + \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}\pi$$

と求めることができる。

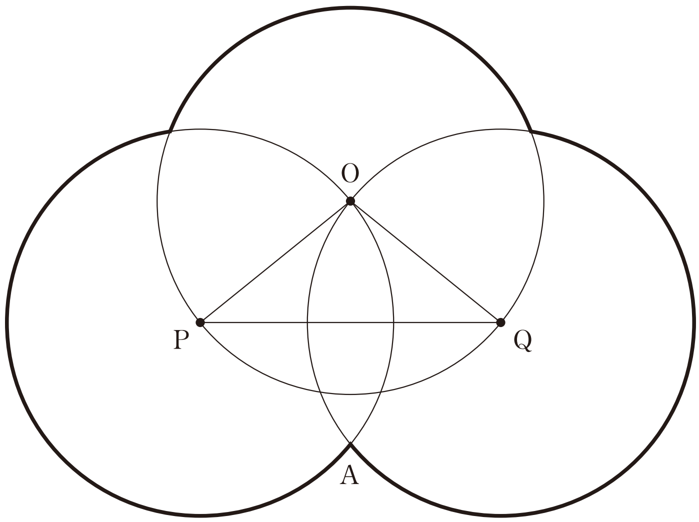



図 1 (再掲)

(数学 I 第 2 問は 42 ページに続く。)

〔2〕 辺の長さがすべて自然数である△ABCについて考えよう。以下では，$\angle \mathrm{BAC} = A$，$\angle \mathrm{ABC} = B$，$\angle \mathrm{ACB} = C$ とする。

(1) $\mathrm{AB} = 9$，$\mathrm{BC} = 5$ とする。また，$n$ は $5 \leqq n \leqq 13$ を満たす自然数とし，$\mathrm{AC} = n$ とする。

(i) $n = 6$ のとき，余弦定理により $\cos B = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であることがわかる。このことから，$\sin B = \dfrac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であるので，△ABCの面積は $\boxed{\text{チツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$ であることがわかる。

(ii) 花子さんと太郎さんは，$n$ の値によって三角形がどのように変化するかについて話している。

花子：$n$ を 5 から 13 まで 1 ずつ増やしていく様子を図にかいてみると，$B$ は大きくなり $C$ は小さくなるね。
太郎：そうだね。どの $n$ で三角形の面積が最大になるかな。
花子：$B$ に注目して考えてみよう。
太郎：3 辺の長さを考えるから，$\sin B$ より $\cos B$ の方が計算しやすそうだね。$\cos B$ と面積の関係を考えてみよう。

（数学 I 第 2 問は次ページに続く。）

△ABC の面積が最大になるのは，$\sin B$ の値が最も $\boxed{\text{ト}}$ ときであり，$|\cos B|$ の値が最も $\boxed{\text{ナ}}$ ときである。ここで，$5 \leqq n \leqq 13$ であることに注意すると，$\cos B$ の値が負であるのは，$n = \boxed{\text{ニ}}$ のときのみであることがわかる。

以上のことから，△ABC の面積が最大となるのは，$n = \boxed{\text{ヌ}}$ のときのみである。

$\boxed{\text{ト}}$，$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

| | |
|---|---|
| ⓪ 小さい | ① 大きい |

$\boxed{\text{ニ}}$ の解答群

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ 7，8 | ① 7，8，9 | ② 7，8，9，10 |
| ③ 9，10 | ④ 9，10，11 | ⑤ 9，10，11，12 |
| ⑥ 10，11，12，13 | ⑦ 11，12，13 | ⑧ 12，13 |

$\boxed{\text{ヌ}}$ の解答群

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ 5 | ① 5，6 | ② 5，13 | ③ 7 |
| ④ 7，8 | ⑤ 8 | ⑥ 10 | ⑦ 10，11 |
| ⑧ 11 | ⑨ 13 | | |

（数学 I 第 2 問は次ページに続く。）

(iii) 太郎さんと花子さんは，△ABC の外接円について話している。

> 太郎：外接円の半径が最も小さくなるときの $n$ も求められそうだね。
>
> 花子：今度は，$C$ に注目して考えてみよう。

△ABC の外接円の半径を $R$ とする。$5 \leqq n \leqq 13$ において，$R$ の値が最も小さくなるときの $n$ について考えよう。

(ii) のように，$\sin C$ や $|\cos C|$ の値が最も大きいときや，最も小さいときを考える。これにより，$R$ の値が最も小さくなるのは，$n =$ $\boxed{ネ}$ のときのみである。

$\boxed{ネ}$ の解答群

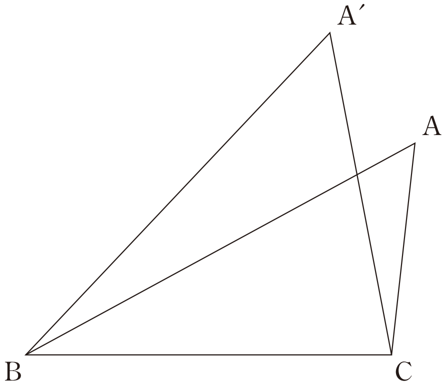
| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ 5 | ① 5，6 | ② 5，13 | ③ 7 |
| ④ 7，8 | ⑤ 8 | ⑥ 10 | ⑦ 10，11 |
| ⑧ 11 | ⑨ 13 | | |

（数学Ⅰ第2問は次ページに続く。）

⑵　外接円の半径が等しい△ABCと△A′BCは，$BC = a$，$AB = A'B = c$，$AC = 4$，$A'C = 5$ を満たすとする。また，$a$，$c$ は $a \leqq c$ を満たす自然数とする。このとき

$a = \boxed{\text{ノ}}$，　$c = \boxed{\text{ハ}}$

である。




参考図

## 第 3 問 （配点　30）

〔1〕 $a$ を定数とし

$$f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - a - 6$$

とする。

(1) 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は

$$\left(a,\ \boxed{\text{ア}}\right)$$

である。

2 次方程式 $f(x) = 0$ が実数解をもたないような定数 $a$ の値の範囲は

$$a < -\boxed{\text{イ}},\quad \boxed{\text{ウ}} < a$$

である。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

| | |
|---|---|
| ⓪ $-a-6$ | ① $a^2-a-6$ |
| ② $2a^2-a-6$ | ③ $3a^2-a-6$ |
| ④ $a+6$ | ⑤ $-a^2+a+6$ |
| ⑥ $-2a^2+a+6$ | ⑦ $-3a^2+a+6$ |

（数学 I 第 3 問は次ページに続く。）

⑵ 太郎さんと花子さんは，⑴を振り返って話している。

太郎：2次方程式$f(x)=0$について，⑴では実数全体において解がない場合の$a$の値の範囲を考えたね。実数全体ではなく，例えば$0 \leqq x \leqq 1$の範囲だけだとどうなるのかな。

花子：⑴で求めた$a$の値の範囲は，$y=f(x)$の最小値が正であるような$a$の値の範囲でもあるね。$0 \leqq x \leqq 1$における$y=f(x)$の最小値や最大値に着目して考えられないかな。

2次方程式$f(x)=0$が$0 \leqq x \leqq 1$において実数解をもたないような定数$a$の値の範囲を求めてみよう。

2次方程式$f(x)=0$が$0 \leqq x \leqq 1$において実数解をもたないための必要十分条件は，2次関数$y=f(x)$のグラフが$x$軸の$0 \leqq x \leqq 1$の部分と共有点をもたないことである。そのような定数$a$は次の条件Ⓐまたは Ⓑのいずれか一つを満たす。

Ⓐ　$0 \leqq x \leqq 1$において，関数$f(x)$の値がつねに正である。

Ⓑ　$0 \leqq x \leqq 1$において，関数$f(x)$の値がつねに負である。

（数学Ⅰ第3問は次ページに続く。）

(i)　条件(A)，すなわち $0 \leqq x \leqq 1$ において，関数

$$f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - a - 6$$

の値がつねに正であるという条件を満たすような定数 $a$ の値の範囲を考える。

$0 \leqq x \leqq 1$ における2次関数 $y = f(x)$ の最小値を $m$ とする。このとき，(A)であるための必要十分条件は $m > 0$ である。

2次関数 $y = f(x)$ のグラフは $\boxed{\text{エ}}$ の放物線である。よって，軸 $x = a$ の位置に着目して考えると，$m$ は次のようになる。

- $a < 0$ ならば，$m = \boxed{\text{オ}}$ である。
- $0 \leqq a \leqq 1$ ならば，$m = \boxed{\text{カ}}$ である。
- $a > 1$ ならば，$m = \boxed{\text{キ}}$ である。

したがって，(A)を満たすような定数 $a$ の値の範囲は

$$a < -\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}, \quad \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} < a$$

である。

(数学 I 第3問は次ページに続く。)

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

| | |
|---|---|
| ⓪ 下に凸 | ① 上に凸 |

$\boxed{\text{オ}}$ ～ $\boxed{\text{キ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $f(0)$ | ① $f(1)$ | ② $f(a)$ |

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

(ii) 条件 Ⓑ，すなわち $0 \leqq x \leqq 1$ において，関数

$$f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - a - 6$$

の値がつねに負であるという条件を満たすような定数 $a$ の値の範囲を考える。

$0 \leqq x \leqq 1$ における 2 次関数 $y = f(x)$ の最大値を $M$ とすると，Ⓑ であるための必要十分条件は $M < 0$ である。また，どのような定数 $a$ に対しても，$M$ は $\boxed{シ}$ である。よって，Ⓑ であるための必要十分条件は $\boxed{ス}$ である。

したがって，Ⓑ を満たすような定数 $a$ の値の範囲は

$$-\boxed{セ} < a < \boxed{ソ}$$

である。

（数学 I 第 3 問は次ページに続く。）

$\boxed{シ}$ の解答群

| | |
|---|---|
| ⓪ $f(0)$ | ① $f(1)$ |
| ② $f(a)$ | ③ $f(0)$　または　$f(1)$ |
| ④ $f(0)$　または　$f(a)$ | ⑤ $f(1)$　または　$f(a)$ |

$\boxed{ス}$ の解答群

⓪ $f(0) < 0$

① $f(1) < 0$

② $f(a) < 0$

③ $f(0) < 0$　または　$f(1) < 0$

④ $f(0) < 0$　または　$f(a) < 0$

⑤ $f(1) < 0$　または　$f(a) < 0$

⑥ $f(0) < 0$　かつ　$f(1) < 0$

⑦ $f(0) < 0$　かつ　$f(a) < 0$

⑧ $f(1) < 0$　かつ　$f(a) < 0$

(i)と(ii)の結果により，2次方程式$f(x) = 0$が$0 \leqq x \leqq 1$において実数解をもたないような定数$a$の値の範囲が得られる。

（数学Ⅰ第3問は次ページに続く。）

〔2〕 花子さんと太郎さんは，クリームパンの価格や利益について話している。

花子：パン屋を経営している父から，クリームパンの価格や利益について相談されているんだ。

太郎：何か利用できそうな情報はないのかな。

花子：価格と売り上げ数のデータを教えてもらっているよ。

太郎：価格と売り上げ数に何か関係があると仮定して考えてみよう。

次の表は，クリームパンの価格と売り上げ数のデータである。表の数値は，クリームパン１個の価格と，その価格でクリームパンを販売した期間における１日あたりの売り上げ数を表している。

| クリームパン１個の価格(円) | 100 | 110 | 130 |
|---|---|---|---|
| １日あたりの売り上げ数(個) | 160 | 140 | 100 |

二人は，上の表から，クリームパン１個の価格が 10 円上がると１日あたりの売り上げ数が 20 個減ると考えて，次の**仮定**を設定した。

**仮定**

１日あたりの売り上げ数は，クリームパン１個の価格の１次関数である。

(数学 I 第３問は次ページに続く。)

(1) クリームパン1個の価格を $x$ 円とすると，1日あたりの売り上げ数は，$\left(\boxed{\text{タチ}}\,x+\boxed{\text{ツテト}}\right)$個となる。

売り上げ数は負の数になることはないので，1日あたりの売り上げ数に対して，次の不等式が成り立つ。

$$\boxed{\text{タチ}}\,x+\boxed{\text{ツテト}}\geqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

① を解くと，$x \leqq \boxed{\text{ナ}}$ である。

したがって，クリームパン1個の価格は，$\boxed{\text{ナ}}$ 円以下で考えなければならない。

クリームパン1個の価格を $x$ 円，1日あたりの売り上げ額を $y$ 円とすると，$x$ と $y$ の関係は

$$y = x\times\left(\boxed{\text{タチ}}\,x+\boxed{\text{ツテト}}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である。

② から，$y$ は $x=\boxed{\text{ニヌ}}$ のときに最大値 $\boxed{\text{ネ}}$ をとることがわかる。したがって，クリームパン1個の価格が $\boxed{\text{ニヌ}}$ 円のとき，1日あたりの売り上げ額が最大になることがわかる。

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ 80 | ① 90 | ② 120 | ③ 140 |
| ④ 160 | ⑤ 180 | ⑥ 200 | ⑦ 240 |

$\boxed{\text{ネ}}$ の解答群

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ 14400 | ① 15400 | ② 16000 | ③ 16200 |
| ④ 17200 | ⑤ 17400 | ⑥ 17600 | ⑦ 17800 |

(数学 I 第3問は次ページに続く。)

(2)　花子さんと太郎さんは，クリームパンの原価を考慮し，利益について話している。

花子：売り上げ額が最大になるとき，利益も最大になるのかな。パンを作るには，小麦粉，塩などの材料費，オーブンの電気代，水道代などの原価がかかるんだ。

太郎：売り上げ額と違って，利益は価格だけでなく原価も関係するから，売り上げ額が最大になっても利益が最大になるとは限らないね。

花子：じゃあ，原価を考慮して，利益が最大になる価格について調べてみよう。クリームパン 1 個あたりの原価は 60 円らしいから，これを使って価格と利益の関係を考えることができるね。

クリームパン 1 個あたりの原価を 60 円とする。また，クリームパン 1 個あたりの利益とは，クリームパン 1 個の価格から原価を引いた金額である。このとき，クリームパン 1 個の価格を $x$ 円，1 日あたりの利益を $z$ 円とすると

$$z = \boxed{\text{ノ}} \times \left( \boxed{\text{タチ}}\,x + \boxed{\text{ツテト}} \right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

である。

(1)から，クリームパン 1 個の価格は，$\boxed{\text{ナ}}$ 円以下にしなければならない。このことに注意すると，③から，$x = \boxed{\text{ハ}}$ のときに $z$ は最大値 $\boxed{\text{ヒ}}$ をとることがわかる。

（数学 I 第 3 問は次ページに続く。）

$\boxed{ノ}$ の解答群

| | |
|---|---|
| ⓪ $x$ | ① $-x$ |
| ② $(x-1)$ | ③ $(1-x)$ |
| ④ $(x-30)$ | ⑤ $(30-x)$ |
| ⑥ $(x-60)$ | ⑦ $(60-x)$ |

$\boxed{ハ}$ の解答群

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ 80 | ① 90 | ② 100 | ③ 110 |
| ④ 120 | ⑤ 140 | ⑥ 160 | ⑦ 180 |

$\boxed{ヒ}$ の解答群

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ 3600 | ① 5600 | ② 6400 | ③ 6800 |
| ④ 7200 | ⑤ 7600 | ⑥ 8000 | ⑦ 8400 |

(数学Ⅰ第3問は次ページに続く。)

⑶　花子さんと太郎さんは，クリームパンの原価が高くなったときの利益について話している。

> 花子：最近，材料費が高くなっていて，クリームパンの原価も高くなりそうなんだ。
> 太郎：原価が 60 円より高くなるってことだね。
> 花子：それで，父はクリームパンの価格を変えようか悩んでいるんだ。原価が高くなっても，クリームパンの利益は，1 日あたり 5000 円以上にならないと困ると言っていたよ。
> 太郎：⑵ の考え方を使うと，原価に応じて利益の最大値を考えることができるね。

⑴から，クリームパン 1 個の価格は，$\boxed{\boxed{\text{ナ}}}$ 円以下にしなければならない。このことに注意すると，クリームパン 1 個あたりの原価が $\boxed{\text{フヘ}}$ 円以下ならば，クリームパン 1 個の価格を適切に決めることで，1 日あたりの利益を 5000 円以上にすることができる。また，クリームパン 1 個あたりの原価が $\boxed{\text{フヘ}}$ 円より高くなると，クリームパン 1 個の価格をどのように決めても，1 日あたりの利益を 5000 円以上にすることができなくなる。

# 第４問 （配点　20）

以下の問題を解答するにあたっては，与えられたデータに対して，次の値を外れ値とする。

「(第１四分位数)－1.5×(四分位範囲)」以下の値
「(第３四分位数)＋1.5×(四分位範囲)」以上の値

花子さんは，日本プロサッカーＪ１リーグ2022シーズンにおける，18チームの成績データの分析を行うことにした。ここでは，各チームのシーズン期間における得点総数(点)，失点総数(点)，勝点(かちてん)(点)，得失点差(点)を使用する。なお，勝点は勝利数と引き分け数を使って計算された値であり，得失点差は得点総数と失点総数を使って計算された値である。以下においては，データは単位(点)を省略して用いることとする。

なお，以下の図や表については，Ｊリーグ公式Webページをもとに作成している。

(数学Ⅰ第４問は次ページに続く。)

表1は，2022シーズンの各チームの得点総数を，値の小さい順に並べたものである。以下では，表1に示す18チームの得点総数のデータを，データ$A$とする。

表1　各チームの得点総数

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 30 | 30 | 31 | 32 | 33 | 35 | 43 | 44 |
| 45 | 45 | 46 | 46 | 47 | 48 | 52 | 65 | 70 |

(1)　データ$A$の四分位範囲は $\boxed{アイ}$ であるので，データ$A$の外れ値をすべてあげると $\boxed{ウ}$ である。

$\boxed{ウ}$ の解答群

⓪　29の一つ　　①　70の一つ

②　29，70の二つ　　③　65，70の二つ

④　29，30，30の三つ　　⑤　29，65，70の三つ

⑥　52，65，70の三つ　　⑦　29，52，65，70の四つ

⑧　29，30，30，65，70の五つ

（数学Ⅰ第4問は次ページに続く。）

(2) データ $A$ から外れ値を除いたものをデータ $B$ とする。データ $A$，データ $B$ の中央値を，それぞれ $m_A$，$m_B$ とし，データ $A$，データ $B$ の平均値を，それぞれ $\overline{a}$，$\overline{b}$ とする。

表 1 (再掲)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 30 | 30 | 31 | 32 | 33 | 35 | 43 | 44 |
| 45 | 45 | 46 | 46 | 47 | 48 | 52 | 65 | 70 |

(i) $m_A = \boxed{\text{エ}}$，　$m_B = \boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ 42.5 | ① 43 | ② 43.5 |
| ③ 44 | ④ 44.5 | ⑤ 45 |

(ii) (データ $A$ の値の合計) − (データ $B$ の値の合計) = $\boxed{\text{カ}}$ より

$$18\,\overline{a} = \boxed{\text{キク}}\,\overline{b} + \boxed{\text{カ}}$$

が成り立つ。

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ 29 | ① 70 | ② 89 |
| ③ 99 | ④ 135 | ⑤ 164 |
| ⑥ 187 | ⑦ 216 | ⑧ 224 |

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

(iii) 表 1 にある 18 チームの得点総数の合計は 771 である。

データ $A$，データ $B$ の第 1 四分位数を，それぞれ $Q_A$，$Q_B$ とする。ここで，外れ値を除くことによる平均値，中央値，第 1 四分位数それぞれの値の変化の大きさを，$|\overline{a}-\overline{b}|$，$|m_A-m_B|$，$|Q_A-Q_B|$ で考え，これらの値をそれぞれ $T_1$，$T_2$，$T_3$ とする。このとき，$T_1$，$T_2$，$T_3$ の大小関係は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $T_1 < T_2 < T_3$ | ① $T_2 < T_3 < T_1$ | ② $T_3 < T_1 < T_2$ |
| ③ $T_1 = T_2 < T_3$ | ④ $T_2 = T_3 < T_1$ | ⑤ $T_3 = T_1 < T_2$ |
| ⑥ $T_1 < T_2 = T_3$ | ⑦ $T_2 < T_3 = T_1$ | ⑧ $T_3 < T_1 = T_2$ |
| ⑨ $T_1 = T_2 = T_3$ | | |

（数学 I 第 4 問は次ページに続く。）

⑶　花子さんは，2022 シーズンの 18 チームの得点総数，失点総数，勝点，得失点差の間にどのような関係があるのかを調べることにした。

（i）　図 1 は得点総数と勝点の散布図，図 2 は失点総数と勝点の散布図である。

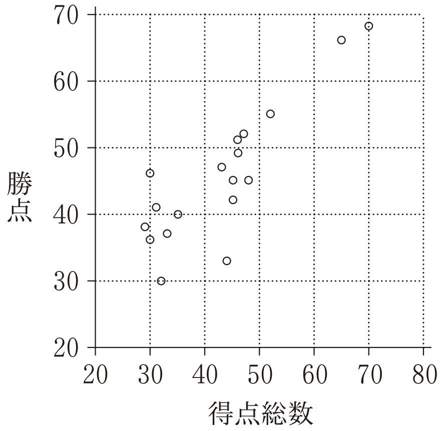



図 1　得点総数と勝点の散布図

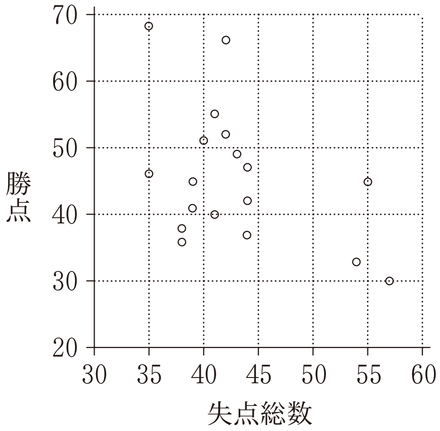



図 2　失点総数と勝点の散布図

次の ⒜，⒝，⒞ は，図 1 と図 2 に関する記述である。

⒜　得点総数が最も小さいチームは，失点総数が最も大きい。
⒝　得点総数の範囲は，失点総数の範囲より大きい。
⒞　得点総数と勝点の間には正の相関があり，かつ失点総数と勝点の間にも正の相関がある。

⒜，⒝，⒞ の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

| | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⒜ | 正 | 正 | 正 | 正 | 誤 | 誤 | 誤 | 誤 |
| ⒝ | 正 | 正 | 誤 | 誤 | 正 | 正 | 誤 | 誤 |
| ⒞ | 正 | 誤 | 正 | 誤 | 正 | 誤 | 正 | 誤 |

（数学Ⅰ第 4 問は次ページに続く。）

(ii) 花子さんは，1失点につきどのくらい得点しているかに興味をもった。図3は，18チームについて各チームの得点総数を失点総数で割った値のデータの箱ひげ図であり，外れ値は白丸で示されている。なお，このデータには同じ値をとるものはない。

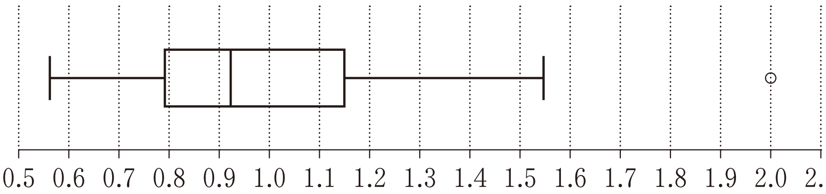



図3　得点総数を失点総数で割った値のデータの箱ひげ図

次の(a)，(b)は，図3に関する記述である。

(a) 第1四分位数以上で中央値より小さいデータの個数は，中央値より大きく第3四分位数以下のデータの個数より少ない。

(b) 失点総数が得点総数より大きいチームは，9チーム以上ある。

(a)，(b)の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{サ}$ である。

$\boxed{サ}$ の解答群

| | ⓪ | ① | ② | ③ |
|---|---|---|---|---|
| (a) | 正 | 正 | 誤 | 誤 |
| (b) | 正 | 誤 | 正 | 誤 |

(数学 I 第4問は次ページに続く。)

(iii) 花子さんは，得失点差と勝点の相関係数を計算することにした。平均値，標準偏差および共分散を求めると，表2のようになった。

表2　得失点差と勝点の平均値，標準偏差，共分散

| | 平均値 | 標準偏差 | 共分散 |
|---|---|---|---|
| 得失点差 | 0.0 | 13.4 | 125.1 |
| 勝点 | 45.6 | 10.0 | |

表2を用いると，得失点差と勝点の相関係数は $\boxed{シ}$ である。

$\boxed{シ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ 0.00 | ① 0.18 | ② 0.36 | ③ 0.52 |
| ④ 0.74 | ⑤ 0.89 | ⑥ 0.93 | ⑦ 1.07 |

（数学Ⅰ第4問は66ページに続く。）

(4) 花子さんは，一般に得点総数，失点総数，得失点差，勝点がとり得る値について，得失点差と勝点の相関係数が負となるのはどのような場合かについて考えることにした。

得点総数，失点総数，勝点を，それぞれ変量 $x$，$y$，$z$ で表し，各チームの $x$，$y$，$z$ の値の組を，それぞれ

$$(x_1,\ y_1,\ z_1),\ (x_2,\ y_2,\ z_2),\ \cdots,\ (x_{18},\ y_{18},\ z_{18})$$

とする。

また，得失点差は「(得点総数)－(失点総数)」で定められる値である。得失点差を変量 $u$ で表すと，各チームの $u$ の値 $u_1$，$u_2$，$\cdots$，$u_{18}$ は

$$u_i = x_i - y_i \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 18)$$

で計算される。例えば，$i = 7$ のときは $u_7 = x_7 - y_7$ と計算される。

$x$，$y$，$u$ の平均値を，それぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$，$\overline{u}$ とすると

$$\overline{u} = \overline{x} - \overline{y}$$

が成り立つので

$$u_i - \overline{u} = (x_i - \overline{x}) - (y_i - \overline{y}) \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 18)$$

と表せる。

まず，$x$ と $z$ の共分散，$y$ と $z$ の共分散，$u$ と $z$ の共分散を，それぞれ $s_{xz}$，$s_{yz}$，$s_{uz}$ とするとき，$s_{uz}$ は $s_{xz}$ と $s_{yz}$ を用いて，$s_{uz} = \boxed{\text{ス}}$ と表せる。

次に，$u$，$z$ の標準偏差を，それぞれ $s_u$，$s_z$ とし，$u$ と $z$ の相関係数を $r_{uz}$ とする。ただし，$s_u \neq 0$，$s_z \neq 0$ とする。このとき，$r_{uz} < 0$ となるための必要十分条件は，$s_{xz}$ と $s_{yz}$ で表すと $\boxed{\text{セ}}$ である。

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $s_{xz} - s_{yz}$ | ① $s_{yz} - s_{xz}$ | ② $s_{xz} + s_{yz}$ |
| ③ $-s_{xz} - s_{yz}$ | ④ $s_{xz}s_{yz}$ | ⑤ $-s_{xz}s_{yz}$ |

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $s_{xz} < -s_{yz}$ | ① $s_{xz} > -s_{yz}$ | ② $s_{xz} < s_{yz}$ |
| ③ $s_{xz} > s_{yz}$ | ④ $s_{xz}s_{yz} > 0$ | ⑤ $s_{xz}s_{yz} < 0$ |