

# 数学 I ・ 数学 A

問 題	選 択 方 法
第 1 問	必 答
第 2 問	必 答
第 3 問	} いずれか 2 問を選択し、 解答しなさい。
第 4 問	
第 5 問	

第 1 問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕  $k$  を定数として、 $x$  についての不等式

$$\sqrt{5}x < k - x < 2x + 1 \quad \dots\dots\dots ①$$

を考える。

(1) 不等式  $k - x < 2x + 1$  を解くと

$$x > \frac{k - \boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

であり、不等式  $\sqrt{5}x < k - x$  を解くと

$$x < \frac{\boxed{\text{ウエ}} + \sqrt{5}}{\boxed{\text{オ}}} k$$

である。

よって、不等式 ① を満たす  $x$  が存在するような  $k$  の値の範囲は

$$k < \boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}} \sqrt{5} \quad \dots\dots\dots ②$$

である。

(数学 I ・ 数学 A 第 1 問は次ページに続く。)

(2)  $p, q$  は  $p < q$  を満たす実数とする。  $x$  の値の範囲  $p < x < q$  に対し、  
 $q - p$  をその範囲の幅ということにする。

② が成り立つとき、不等式 ① を満たす  $x$  の値の範囲の幅が  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  より  
 大きくなるような  $k$  の値の範囲は

$$k < \boxed{\text{クケ}} - \boxed{\text{コ}} \sqrt{5}$$

である。

(数学 I ・ 数学 A 第 1 問は次ページに続く。)

## 数学 I ・ 数学 A

〔2〕  $\triangle ABC$  において  $BC = 1$  であるとする。  $\sin \angle ABC$  と  $\sin \angle ACB$  に関する条件が与えられたときの  $\triangle ABC$  の辺，角，面積について考察する。

(1)  $\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{4}$  であるとき，  $\cos \angle ABC = \pm \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$  である。

(2)  $\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ，  $\sin \angle ACB = \frac{\sqrt{15}}{8}$  であるとする。

(i) このとき，  $AC = \boxed{\text{ス}} AB$  である。

(ii) この条件を満たす三角形は二つあり，その中で面積が大きい方の

$\triangle ABC$  においては，  $AB = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$  である。

(数学 I ・ 数学 A 第 1 問は次ページに続く。)

- (3)  $\sin \angle ABC = 2 \sin \angle ACB$  を満たす  $\triangle ABC$  のうち、面積  $S$  が最大となるものを求めよう。

$\sin \angle ABC = 2 \sin \angle ACB$  と  $BC = 1$  により

$$\cos \angle ABC = \frac{\boxed{\text{タ}} - \boxed{\text{チ}} AB^2}{2 AB}$$

である。 $\triangle ABC$  の面積  $S$  について調べるために、 $S^2$  を考える。 $AB^2 = x$  とおくと

$$S^2 = -\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}} x^2 + \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} x - \frac{1}{16}$$

と表すことができる。したがって、 $S^2$  が最大となるのは  $x = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$  のとき、すなわち  $AB = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$  のときである。 $S > 0$  より、このときに面積  $S$  も最大となる。

また、面積  $S$  が最大となる  $\triangle ABC$  において、 $\angle ABC$  は  $\boxed{\text{ヒ}}$  で、 $\angle ACB$  は  $\boxed{\text{フ}}$  である。

$\boxed{\text{ヒ}}$ ，  $\boxed{\text{フ}}$  の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

① 鋭角

② 直角

③ 鈍角

## 数学 I ・ 数学 A

### 第 2 問 (必答問題) (配点 30)

- 〔1〕 高校 1 年生の太郎さんと花子さんのクラスでは、文化祭で焼きそば屋を出店することになった。二人は 1 皿あたりの価格をいくらにするかを検討するためにアンケート調査を行い、1 皿あたりの価格と売り上げ数の関係について次の表のように予測した。

1 皿あたりの価格 (円)	100	150	200	250	300
売り上げ数 (皿)	1250	750	450	250	50

この結果から太郎さんと花子さんは、1 皿あたりの価格が 100 円以上 300 円以下の範囲で、予測される利益(以下、利益)の最大値について考えることにした。

太郎：価格を横軸、売り上げ数を縦軸にとって散布図をかいてみたよ。

花子：散布図の点の並びは、1 次関数のグラフのようには見えないね。

2 次関数のグラフみたいに見えるよ。

太郎：価格が 100, 200, 300 のときの点を通る 2 次関数のグラフをかくと、図 1 のように価格が 150, 250 のときの点もそのグラフの近くにあるよ。

花子：現実には、もっと複雑な関係なのだろうけど、1 次関数と 2 次関数で比べると、2 次関数で考えた方がよいような気がするね。

(数学 I ・ 数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

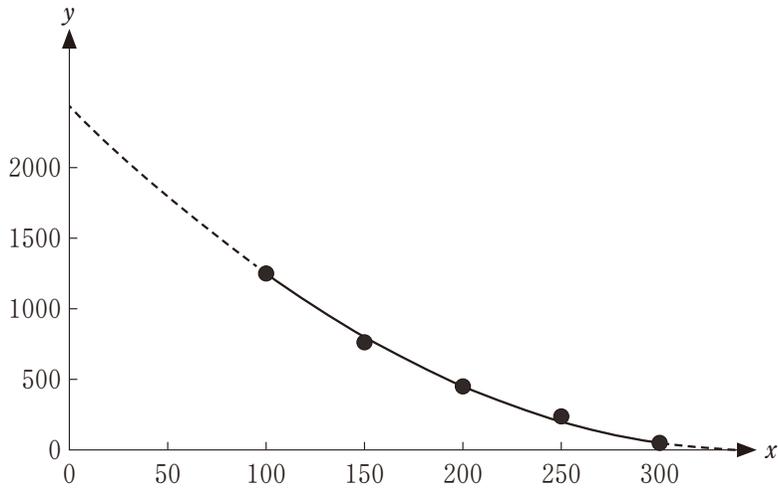


図 1

2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

のグラフは、3 点(100, 1250), (200, 450), (300, 50)を通るとする。このとき、 $b =$  アイウ である。

(数学 I ・ 数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

## 数学 I ・ 数学 A

二人は、1皿あたりの価格  $x$  と売り上げ数  $y$  の関係が①を満たしたときの、 $100 \leq x \leq 300$  での利益の最大値  $M$  について考えることにした。

1皿あたりの材料費は80円であり、材料費以外にかかる費用は5000円である。よって、 $x - 80$  と売り上げ数の積から、5000を引いたものが利益となる。

このとき、売り上げ数を①の右辺の2次式とすると、利益は  $x$  の  次式となる。一方で、売り上げ数として①の右辺の代わりに  $x$  の  次式を使えば、利益は  $x$  の2次式となる。

太郎：利益が  次式だと、今の私たちの知識では最大値  $M$  を正確に求めることができないね。

花子：①の右辺の代わりに  次式を使えば利益は2次式になるから、最大値を求められるよ。

太郎：現実の問題を考えるときには正確な答えが出せないことも多いから、自分の知識の範囲内で工夫しておおよその値を出すことには価値があると思うよ。

花子：考えているのが利益だから、①の右辺の代わりにの式は売り上げ数を少なく見積もった式を考えると手堅いね。

太郎：少なく見積もるということは、その関数のグラフは①のグラフより、下の方にあるということだね。

(数学 I ・ 数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

1 次関数

$$y = -4x + 1160 \quad \dots\dots\dots ②$$

を考える。このとき、①と②のグラフの位置関係は次の図2のようになっている。

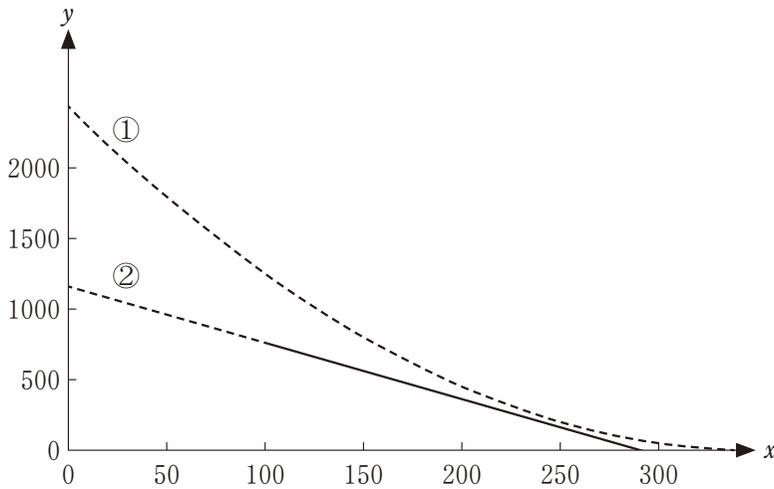


図 2

①の右辺の代わりに②の右辺を使うと、売り上げ数を少なく見積もることになる。売り上げ数を②の右辺としたときの利益  $z$  は

$$z = - \boxed{\text{カ}} x^2 + \boxed{\text{キクケコ}} x - 97800$$

で与えられる。 $z$  が最大となる  $x$  を  $p$  とおくと、 $p = \boxed{\text{サシス}}$  であり、 $z$  の最大値は 39100 である。

(数学 I ・ 数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

## 数学 I ・ 数学 A

太郎：売り上げ数を少なく見積もった式は、各  $x$  について値が ① より小さければよいので、色々な式が考えられるね。

花子：それらの式を ① の右辺の代わりに使ったときの利益の最大値と、① の右辺から計算される利益の最大値  $M$  との関係はどうなるのかな。

### 1 次関数

$$y = -8x + 1968 \quad \dots\dots\dots ③$$

を考える。売り上げ数を ③ の右辺としたときの利益は  $x = 163$  のときに最大となり、最大値は 50112 となる。

また、①～③ のグラフの位置関係は次の図 3 のようになっている。

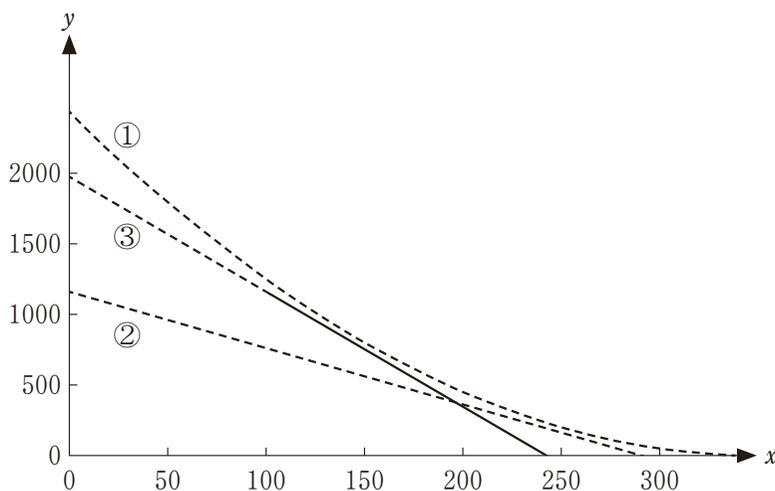


図 3

(数学 I ・ 数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

売り上げ数を①の右辺としたときの利益の記述として、次の⑦~⑩のうち、正しいものは セ と ソ である。

セ , ソ の解答群(解答の順序は問わない。)

- ⑦ 利益の最大値  $M$  は 39100 である。
- ⑧ 利益の最大値  $M$  は 50112 である。
- ⑨ 利益の最大値  $M$  は  $\frac{39100 + 50112}{2}$  である。
- ⑩  $x = 163$  とすれば、利益は少なくとも 50112 以上となる。
- ⑪  $x = p$  とすれば、利益は少なくとも 39100 以上となる。
- ⑫  $x = 163$  のときに利益は最大値  $M$  をとる。
- ⑬  $x = p$  のときに利益は最大値  $M$  をとる。

(数学 I ・ 数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

# 数学 I ・ 数学 A

## 1 次関数

$$y = -6x + 1860 \quad \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

を考える。  $100 \leq x \leq 300$  において、 売り上げ数を  $\textcircled{4}$  の右辺としたときの利益は  $x = 195$  のときに最大となり、 最大値は 74350 となる。

また、  $\textcircled{1} \sim \textcircled{4}$  のグラフの位置関係は次の図 4 のようになっている。

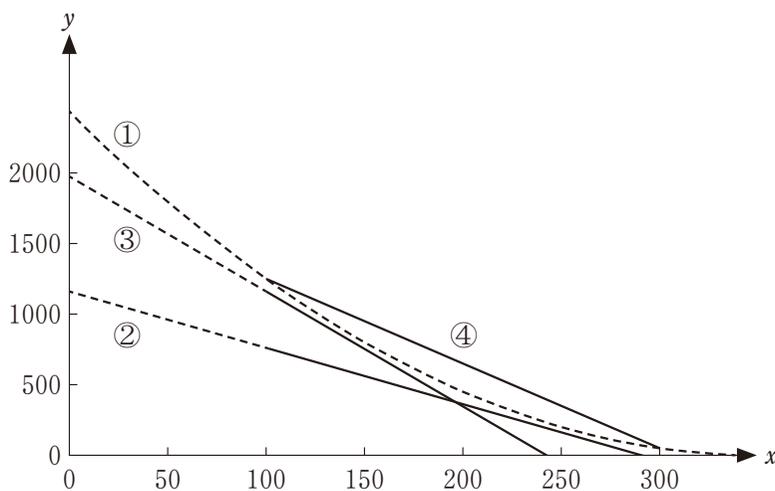


図 4

(数学 I ・ 数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

売り上げ数を ① の右辺としたときの利益の最大値  $M$  についての記述として、次の ①～④のうち、正しいものは タ である。

タ の解答群

- ① 利益の最大値  $M$  は 50112 より小さい。
- ② 利益の最大値  $M$  は 50112 である。
- ③ 利益の最大値  $M$  は 50112 より大きく 74350 より小さい。
- ④ 利益の最大値  $M$  は 74350 である。
- ⑤ 利益の最大値  $M$  は 74350 より大きい。

(数学 I ・ 数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

## 数学 I ・ 数学 A

〔2〕 花子さんの通う学校では、生徒会会則の一部を変更することの賛否について生徒全員が投票をすることになった。投票結果に関心がある花子さんは、身近な人たちに尋ねて下調べをしてみようと思い、各回答が賛成ならば1、反対ならば0と表すことにした。このようにして作成される  $n$  人分のデータを  $x_1, x_2, \dots, x_n$  と表す。ただし、賛成と反対以外の回答はないものとする。

例えば、10人について調べた結果が

0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1

であったならば、 $x_1 = 0, x_2 = 1, \dots, x_{10} = 1$  となる。この場合、データの値の総和は8であり、平均値は  $\frac{4}{5}$  である。

(1) データの値の総和  $x_1 + x_2 + \dots + x_n$  は  と一致し、平均値

$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$  は  と一致する。

,  の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- ① 賛成の人の数
- ② 反対の人の数
- ③ 賛成の人の数から反対の人の数を引いた値
- ④  $n$  人中における賛成の人の割合
- ⑤  $n$  人中における反対の人の割合
- ⑥  $\frac{\text{賛成の人の数}}{\text{反対の人の数}}$  の値

(数学 I ・ 数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

- (2) 花子さんは、0 と 1 だけからなるデータの平均値と分散について考えてみることにした。

$m = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$  とおくと、平均値は  $\frac{m}{n}$  である。また、分散を  $s^2$  で表す。 $s^2$  は、0 と 1 の個数に着目すると

$$s^2 = \frac{1}{n} \left\{ \boxed{\text{テ}} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^2 + \boxed{\text{ト}} \left(0 - \frac{m}{n}\right)^2 \right\} = \boxed{\text{ナ}}$$

と表すことができる。

$\boxed{\text{テ}}$  ,  $\boxed{\text{ト}}$  の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- |                                  |                 |                 |                     |
|----------------------------------|-----------------|-----------------|---------------------|
| ① $n$                            | ② $m$           | ③ $(n - m)$     | ④ $\frac{m}{n}$     |
| ⑤ $\left(1 - \frac{m}{n}\right)$ | ⑥ $\frac{n}{2}$ | ⑦ $\frac{m}{2}$ | ⑧ $\frac{n - m}{2}$ |

$\boxed{\text{ナ}}$  の解答群

- |                                   |                                    |                                  |
|-----------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|
| ① $\frac{m^2}{n^2}$               | ② $\left(1 - \frac{m}{n}\right)^2$ | ③ $\frac{m(n - m)}{n^2}$         |
| ④ $\frac{m(1 - m)}{n^2}$          | ⑤ $\frac{m(n - m)}{2n^2}$          | ⑥ $\frac{n^2 - 3mn + 3m^2}{n^2}$ |
| ⑦ $\frac{n^2 - 2mn + 2m^2}{2n^2}$ |                                    |                                  |

(数学 I ・ 数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

## 数学 I ・ 数学 A

〔3〕 変量  $x, y$  の値の組

$$(-1, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, -1), \quad (1, 1)$$

をデータ  $W$  とする。データ  $W$  の  $x$  と  $y$  の相関係数は 0 である。データ  $W$  に、新たに 1 個の値の組を加えたときの相関係数について調べる。なお、必要に応じて、後に示す表 1 の計算表を用いて考えてもよい。

$a$  を実数とする。データ  $W$  に  $(5a, 5a)$  を加えたデータを  $W'$  とする。 $W'$  の  $x$  の平均値  $\bar{x}$  は  ,  $W'$  の  $x$  と  $y$  の共分散  $s_{xy}$  は  となる。ただし、 $x$  と  $y$  の共分散とは、 $x$  の偏差と  $y$  の偏差の積の平均値である。

$W'$  の  $x$  と  $y$  の標準偏差を、それぞれ  $s_x, s_y$  とする。積  $s_x s_y$  は  となる。また相関係数が 0.95 以上となるための必要十分条件は  $s_{xy} \geq 0.95 s_x s_y$  である。これより、相関係数が 0.95 以上となるような  $a$  の値の範囲は  である。

表 1 計算表

$x$	$y$	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
-1	-1			
-1	1			
1	-1			
1	1			
$5a$	$5a$			

(数学 I ・ 数学 A 第 2 問は次ページに続く。)



第 3 問 (選択問題) (配点 20)

- (1) 1 枚の硬貨を繰り返し投げるとき、この硬貨の表裏の出方に応じて、座標平面上の点 P が次の規則 1 に従って移動するものとする。

規則 1

- 点 P は原点  $O(0, 0)$  を出発点とする。
- 点 P の  $x$  座標は、硬貨を投げるごとに 1 だけ増加する。
- 点 P の  $y$  座標は、硬貨を投げるごとに、表が出たら 1 だけ増加し、裏が出たら 1 だけ減少する。

また、点 P の座標を次の記号で表す。

記号

硬貨を  $k$  回投げ終えた時点での点 P の座標  $(x, y)$  を  $(k, y_k)$  で表す。

座標平面上の点 P の移動の仕方について、例えば、硬貨を 1 回投げて表が出た場合について考える。このとき、点 P の座標は  $(1, 1)$  となる。これを図 1 のように、原点  $O(0, 0)$  と点  $(1, 1)$  をまっすぐな矢印で結ぶ。このようにして点 P の移動の仕方を表す。

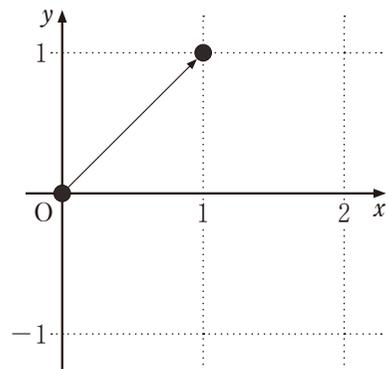


図 1

以下において、図を使用する際には同じように考えることにする。

(数学 I ・ 数学 A 第 3 問は次ページに続く。)

(i) 硬貨を 3 回投げ終えたとき、点 P の移動の仕方が条件

$$y_1 \geq -1 \text{ かつ } y_2 \geq -1 \text{ かつ } y_3 \geq -1 \quad \dots\dots\dots (*)$$

を満たす確率を求めよう。

条件(\*)を満たす点 P の移動の仕方は図 2 のようになる。例えば点 O(0, 0) から点 A(2, 0) までの点 P の移動の仕方は、点 O(0, 0) から点(1, 1)まで移動したのち点 A(2, 0)に移動する場合と、点 O(0, 0)から点(1, -1)まで移動したのち点 A(2, 0)に移動する場合のいずれかであるため、2 通りある。このとき、この移動の仕方の総数である 2 を、**四角囲みの中の数字**で点 A(2, 0)の近くを書く。図 2 における他の四角囲みの中の数字についても同様に考える。

このように考えると、条件(\*)を満たす点 P の移動の仕方のうち、点(3, 3)に至る移動の仕方は **ア** 通りあり、点(3, 1)に至る移動の仕方は **イ** 通りあり、点(3, -1)に至る移動の仕方は **ウ** 通りある。

よって、点 P の移動の仕方が条件(\*)を満たすような硬貨の表裏の出方の総数は

$$\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{ウ}}$$

である。

したがって、点 P の移動の仕方が条件(\*)を満たす確率は

$$\frac{\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{ウ}}}{2^3}$$

として求めることができる。

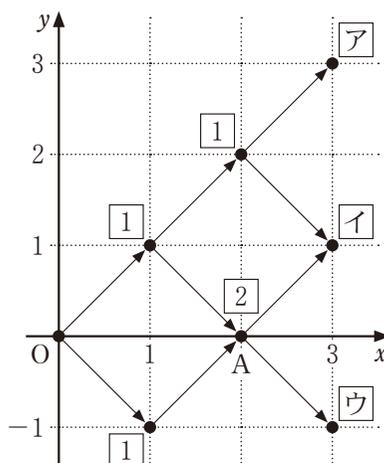


図 2

(数学 I ・ 数学 A 第 3 問は次ページに続く。)

## 数学 I ・ 数学 A

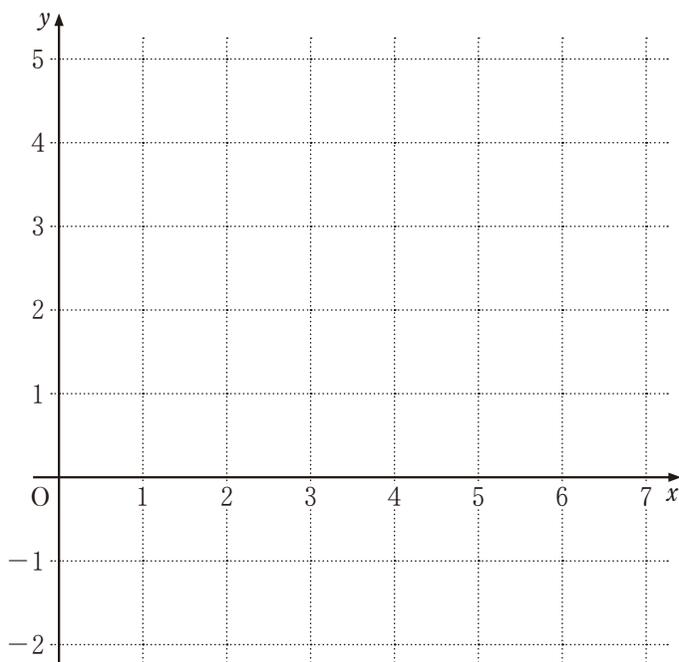
(ii) 硬貨を 4 回投げるとする。このとき、(i)と同様に図を用いて考えよう。

$y_1 \geq 0$  かつ  $y_2 \geq 0$  かつ  $y_3 \geq 0$  かつ  $y_4 \geq 0$  である確率は  $\frac{\boxed{\text{工}}}{\boxed{\text{オ}}}$  となる。

また、 $y_1 \geq 0$  かつ  $y_2 \geq 0$  かつ  $y_3 = 1$  かつ  $y_4 \geq 0$  である確率は  $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$  と

なる。さらに、 $y_1 \geq 0$  かつ  $y_2 \geq 0$  かつ  $y_3 \geq 0$  かつ  $y_4 \geq 0$  であったとき、

$y_3 = 1$  である条件付き確率は  $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$  となる。



参考図

(iii) 硬貨を 4 回投げ終えた時点で点 P の座標が (4, 2) であるとき、点 (4, 2)

に至る移動の仕方によらず表の出る回数は  $\boxed{\text{コ}}$  回となり、裏の出る回数は

$(4 - \boxed{\text{コ}})$  回となる。

(数学 I ・ 数学 A 第 3 問は次ページに続く。)

- (2) 1 個のさいころを繰り返し投げるとき、このさいころの目の出方に応じて、数直線上の点 Q が次の規則 2 に従って移動するものとする。

規則 2

- 点 Q は原点 O を出発点とする。
- 点 Q の座標は、さいころを投げるごとに、3 の倍数の目が出たら 1 だけ増加し、それ以外の目が出たら 1 だけ減少する。

- (i) さいころを 7 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 3 である確率は  $\frac{\boxed{\text{サン}}}{\boxed{\text{スセソ}}}$  となる。

- (ii) さいころを 7 回投げる間、点 Q の座標が つねに 0 以上 3 以下であり、かつ 7 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 3 である確率は  $\frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテトナ}}}$  となる。

- (iii) さいころを 7 回投げる間、点 Q の座標が つねに 0 以上 3 以下であり、かつ 7 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 3 であったとき、3 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 1 である条件付き確率は  $\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$  となる。

第 4 問 (選択問題) (配点 20)

$x, y, z$  についての二つの式をともに満たす整数  $x, y, z$  が存在するかどうかを考えてみよう。

(1) 二つの式が

$$7x + 13y + 17z = 8 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

と

$$35x + 39y + 34z = 37 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

の場合を考える。①, ② から  $x$  を消去すると

$$\boxed{\text{アイ}} y + \boxed{\text{ウエ}} z = 3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

を得る。③ を  $y, z$  についての不定方程式とみると、その整数解のうち、 $y$  が正の整数で最小になるのは

$$y = \boxed{\text{オ}}, \quad z = \boxed{\text{カキ}}$$

である。よって、③ のすべての整数解は、 $k$  を整数として

$$y = \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{クケ}} k, \quad z = \boxed{\text{カキ}} + \boxed{\text{コサ}} k$$

と表される。これらを① に代入して  $x$  を求めると

$$x = 31k - 3 + \frac{\boxed{\text{シ}} k + 2}{7}$$

となるので、 $x$  が整数になるのは、 $k$  を 7 で割ったときの余りが  $\boxed{\text{ス}}$  のときである。

以上のことから、この場合は、二つの式をともに満たす整数  $x, y, z$  が存在することがわかる。

(数学 I ・ 数学 A 第 4 問は次ページに続く。)

(2)  $a$  を整数とする。二つの式が

$$2x + 5y + 7z = a \quad \dots\dots\dots ④$$

と

$$3x + 25y + 21z = -1 \quad \dots\dots\dots ⑤$$

の場合を考える。⑤ - ④ から

$$x = -20y - 14z - 1 - a \quad \dots\dots\dots ⑥$$

を得る。また、⑤  $\times$  2 - ④  $\times$  3 から

$$35y + 21z = -2 - 3a \quad \dots\dots\dots ⑦$$

を得る。このとき

$a$  を セ で割ったときの余りが ソ である

ことは、⑦ を満たす整数  $y, z$  が存在するための必要十分条件であることがわかる。そのときの整数  $y, z$  を⑥ に代入すると、 $x$  も整数になる。また、そのときの  $x, y, z$  は④ と⑤ をともに満たす。

以上のことから、この場合は、 $a$  の値によって、二つの式をともに満たす整数  $x, y, z$  が存在する場合と存在しない場合があることがわかる。

(数学 I ・ 数学 A 第 4 問は次ページに続く。)

## 数学 I ・ 数学 A

(3)  $b$  を整数とする。二つの式が

$$x + 2y + bz = 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{8}$$

と

$$5x + 6y + 3z = 5 + b \quad \dots\dots\dots \textcircled{9}$$

の場合を考える。 $\textcircled{9} - \textcircled{8} \times 5$  から

$$-4y + (3 - 5b)z = b \quad \dots\dots\dots \textcircled{10}$$

を得る。 $\textcircled{10}$  の左辺の  $y$  の係数に着目することにより

$b$  を 4 で割ったときの余りが  または  である

ことは、 $\textcircled{10}$  を満たす整数  $y, z$  が存在するための必要十分条件であることがわかる。ただし、 <  とする。

そのときの整数  $y, z$  を  $\textcircled{8}$  に代入すると、 $x$  も整数になる。また、そのときの  $x, y, z$  は  $\textcircled{8}$  と  $\textcircled{9}$  をともに満たす。

以上のことから、この場合も、 $b$  の値によって、二つの式をともに満たす整数  $x, y, z$  が存在する場合と存在しない場合があることがわかる。

(数学 I ・ 数学 A 第 4 問は次ページに続く。)

(4)  $c$  を整数とする。二つの式が

$$x + 3y + 5z = 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{11}$$

と

$$cx + 3(c + 5)y + 10z = 3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{12}$$

の場合を考える。これまでと同様に、 $y, z$  についての不定方程式を考察することにより

$c$  を  で割ったときの余りが  または  である

ことは、 $\textcircled{11}$  と  $\textcircled{12}$  をともに満たす整数  $x, y, z$  が存在するための必要十分条件であることがわかる。

第 5 問 (選択問題) (配点 20)

$\triangle ABC$ において辺  $AB$  を  $2 : 3$  に内分する点を  $P$  とする。辺  $AC$  上に 2 点  $A, C$  のいずれとも異なる点  $Q$  をとる。線分  $BQ$  と線分  $CP$  との交点を  $R$  とし、直線  $AR$  と辺  $BC$  との交点を  $S$  とする。

以下の問題において比を解答する場合は、最も簡単な整数の比で答えよ。

- (1) 点  $Q$  は辺  $AC$  を  $1 : 2$  に内分する点とする。このとき、点  $S$  は辺  $BC$  を  :  に内分する点である。

$AB = 5$  とし、 $\triangle ABC$  の内接円が辺  $AB$ , 辺  $AC$  とそれぞれ点  $P$ , 点  $Q$  で接しているとする。 $AQ =$   であることに注意すると、 $BC =$   であり、 であることがわかる。

の解答群

- ① 点  $R$  は  $\triangle ABC$  の内心
- ② 点  $R$  は  $\triangle ABC$  の重心
- ③ 点  $S$  は  $\triangle ABC$  の内接円と辺  $BC$  との接点
- ④ 点  $S$  は点  $A$  から辺  $BC$  に下ろした垂線と辺  $BC$  との交点

(数学 I ・ 数学 A 第 5 問は次ページに続く。)

(2)  $\triangle BPR$  と  $\triangle CQR$  の面積比について考察する。

- (i) 点 Q は辺 AC を 1 : 4 に内分する点とする。このとき、点 R は、線分 BQ を  :  に内分し、線分 CP を  :  に内分する。  
したがって

$$\frac{\triangle CQR \text{ の面積}}{\triangle BPR \text{ の面積}} = \frac{\text{シス}}{\text{セ}}$$

である。

- (ii)  $\frac{\triangle CQR \text{ の面積}}{\triangle BPR \text{ の面積}} = \frac{1}{4}$  のとき、点 Q は辺 AC を  :  に内分する点である。