

第3問～第5問は、いずれか2問を選択し、
解答しなさい。

第3問 (選択問題) (配点 20)

自然数 n に対し、 2^n の一の位の数 a_n とする。また、数列 $\{b_n\}$ は

$$b_1 = 1$$

$$b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{4}$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たすとする。

(1) $a_1 = 2$, $a_2 = \boxed{\text{ア}}$, $a_3 = \boxed{\text{イ}}$,
 $a_4 = \boxed{\text{ウ}}$, $a_5 = \boxed{\text{エ}}$ である。この
 ことから、すべての自然数 n に対して、
 $a_{\boxed{\text{オ}}} = a_n$ となることがわかる。 $\boxed{\text{オ}}$ に
 当てはまるものを、次の①～⑤のうちから一つ
 選べ。

① $5n$

② $4n + 1$

③ $n + 3$

④ $n + 4$

⑤ $n + 5$

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。22 ページの ① を繰り返し用いることにより

$$b_{n+4} = \frac{a_{n+3} a_{n+2} a_{n+1} a_n}{2^{\boxed{\text{カ}}}} b_n$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことがわかる。ここで、

$$a_{n+3} a_{n+2} a_{n+1} a_n = 3 \cdot 2^{\boxed{\text{キ}}}$$

$$\text{ら, } b_{n+4} = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} b_n \text{ が成り立つ。このこ}$$

とから、自然数 k に対して

$$b_{4k-3} = \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}$$

$$b_{4k-2} = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}$$

$$b_{4k-1} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}$$

$$b_{4k} = \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}$$

である。

(3) $S_n = \sum_{j=1}^n b_j$ とおく。自然数 m に対して

$$S_{4m} = \boxed{\text{タ}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^m - \boxed{\text{チ}}$$

である。

(4) 積 $b_1 b_2 \cdots b_n$ を T_n とおく。自然数 k に対して

$$b_{4k-3} b_{4k-2} b_{4k-1} b_{4k} = \frac{1}{\boxed{\text{ツ}}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{\boxed{\text{テ}}^{(k-1)}}$$

であることから、自然数 m に対して

$$T_{4m} = \frac{1}{\boxed{\text{ツ}}}^m \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{\boxed{\text{ト}}^{m^2} - \boxed{\text{ナ}}^m}$$

である。また、 T_{10} を計算すると、

$$T_{10} = \frac{3^{\boxed{\text{ニ}}}}{2^{\boxed{\text{又ネ}}}} \text{である。}$$