数　学　Ⅱ

(全 問 必 答)

第１問　(配点　30)

〔1〕 座標平面上に点A(－8，0)をとる。また，不等式

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 \leqq 0$$

の表す領域を D とする。

(1) 領域 D は，中心が点$\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$，半径が $\boxed{\text{ウ}}$ の円の $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ 周	① 内　部	② 外　部
③ 周および内部	④ 周および外部	

以下，点$\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$をQとし，方程式

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$$

の表す図形を C とする。

(数学Ⅱ第１問は次ページに続く。)

⑵　点Aを通る直線と領域Dが共有点をもつのはどのようなときかを考えよう。

(i)　⑴により，直線$y=$ $\boxed{\text{オ}}$ は点Aを通るCの接線の一つとなることがわかる。

太郎さんと花子さんは点Aを通るCのもう一つの接線について話している。

点Aを通り，傾きがkの直線をℓとする。

太郎：直線ℓの方程式は$y=k(x+8)$と表すことができるから，
これを
$$x^2+y^2-4x-10y+4=0$$
に代入することで接線を求められそうだね。

花子：x軸と直線AQのなす角のタンジェントに着目することでも
求められそうだよ。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(ii) 太郎さんの求め方について考えてみよう。

$y = k(x + 8)$ を $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ に代入すると，x についての 2 次方程式

$(k^2 + 1)x^2 + (16k^2 - 10k - 4)x + 64k^2 - 80k + 4 = 0$

が得られる。この方程式が $\boxed{\text{カ}}$ ときの k の値が接線の傾きとなる。

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ 重解をもつ
① 異なる二つの実数解をもち，一つは 0 である
② 異なる二つの正の実数解をもつ
③ 正の実数解と負の実数解をもつ
④ 異なる二つの負の実数解をもつ
⑤ 異なる二つの虚数解をもつ

(iii) 花子さんの求め方について考えてみよう。

x 軸と直線 AQ のなす角を θ $\left(0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\tan\theta = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

であり，直線 $y = \boxed{\text{オ}}$ と異なる接線の傾きは $\tan \boxed{\text{ケ}}$ と表すことができる。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ θ	① 2θ	② $\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$
③ $\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$	④ $(\theta + \pi)$	⑤ $(\theta - \pi)$
⑥ $\left(2\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$	⑦ $\left(2\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$	

（数学Ⅱ第 1 問は次ページに続く。）

(iv) 点Aを通るCの接線のうち，直線$y=$ $\boxed{オ}$ と異なる接線の傾きをk_0とする。このとき，(ii) または (iii) の考え方を用いることにより

$$k_0 = \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$$

であることがわかる。

直線ℓと領域Dが共有点をもつようなkの値の範囲は $\boxed{シ}$ である。

$\boxed{シ}$ の解答群

⓪ $k > k_0$	① $k \geqq k_0$
② $k < k_0$	③ $k \leqq k_0$
④ $0 < k < k_0$	⑤ $0 \leqq k \leqq k_0$

(数学Ⅱ第１問は次ページに続く。)

〔2〕 a, b は正の実数であり, $a \neq 1$, $b \neq 1$ を満たすとする。太郎さんは $\log_a b$ と $\log_b a$ の大小関係を調べることにした。

(1) 太郎さんは次のような考察をした。

まず, $\log_3 9 = \boxed{\text{ス}}$, $\log_9 3 = \dfrac{1}{\boxed{\text{ス}}}$ である。この場合

$\log_3 9 > \log_9 3$

が成り立つ。

一方, $\log_{\frac{1}{4}} \boxed{\text{セ}} = -\dfrac{3}{2}$, $\log_{\boxed{\text{セ}}} \dfrac{1}{4} = -\dfrac{2}{3}$ である。この場合

$\log_{\frac{1}{4}} \boxed{\text{セ}} < \log_{\boxed{\text{セ}}} \dfrac{1}{4}$

が成り立つ。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(2) ここで

$$\log_a b = t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

とおく。

(1)の考察をもとにして，太郎さんは次の式が成り立つと推測し，それが正しいことを確かめることにした。

$$\log_b a = \frac{1}{t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

①により，$\boxed{\text{ソ}}$ である。このことにより $\boxed{\text{タ}}$ が得られ，②が成り立つことが確かめられる。

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪ $a^b = t$	① $a^t = b$	② $b^a = t$
③ $b^t = a$	④ $t^a = b$	⑤ $t^b = a$

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪ $a = t^{\frac{1}{b}}$	① $a = b^{\frac{1}{t}}$	② $b = t^{\frac{1}{a}}$
③ $b = a^{\frac{1}{t}}$	④ $t = b^{\frac{1}{a}}$	⑤ $t = a^{\frac{1}{b}}$

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

⑶　次に，太郎さんは⑵の考察をもとにして

$t > \dfrac{1}{t}$ …………………………… ③

を満たす実数 t ($t \neq 0$) の値の範囲を求めた。

太郎さんの考察

$t > 0$ ならば，③ の両辺に t を掛けることにより，$t^2 > 1$ を得る。このような t ($t > 0$) の値の範囲は $1 < t$ である。

$t < 0$ ならば，③ の両辺に t を掛けることにより，$t^2 < 1$ を得る。このような t ($t < 0$) の値の範囲は $-1 < t < 0$ である。

この考察により，③ を満たす t ($t \neq 0$) の値の範囲は

$-1 < t < 0$，$1 < t$

であることがわかる。

ここで，a の値を一つ定めたとき，不等式

$\log_a b > \log_b a$ …………………………… ④

を満たす実数 b ($b > 0$，$b \neq 1$) の値の範囲について考える。

④ を満たす b の値の範囲は，$a > 1$ のときは $\boxed{\text{チ}}$ であり，$0 < a < 1$ のときは $\boxed{\text{ツ}}$ である。

(数学Ⅱ第１問は次ページに続く。)

$\boxed{チ}$ の解答群

⓪ $0 < b < \dfrac{1}{a}$，$1 < b < a$	① $0 < b < \dfrac{1}{a}$，$a < b$
② $\dfrac{1}{a} < b < 1$，$1 < b < a$	③ $\dfrac{1}{a} < b < 1$，$a < b$

$\boxed{ツ}$ の解答群

⓪ $0 < b < a$，$1 < b < \dfrac{1}{a}$	① $0 < b < a$，$\dfrac{1}{a} < b$
② $a < b < 1$，$1 < b < \dfrac{1}{a}$	③ $a < b < 1$，$\dfrac{1}{a} < b$

(4) $p = \dfrac{12}{13}$，$q = \dfrac{12}{11}$，$r = \dfrac{14}{13}$ とする。

次の⓪～③のうち，正しいものは $\boxed{テ}$ である。

$\boxed{テ}$ の解答群

⓪ $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$

① $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$

② $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$

③ $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$

第２問 （配点　30）

〔１〕 a を実数とし，$f(x) = x^3 - 6ax + 16$ とおく。

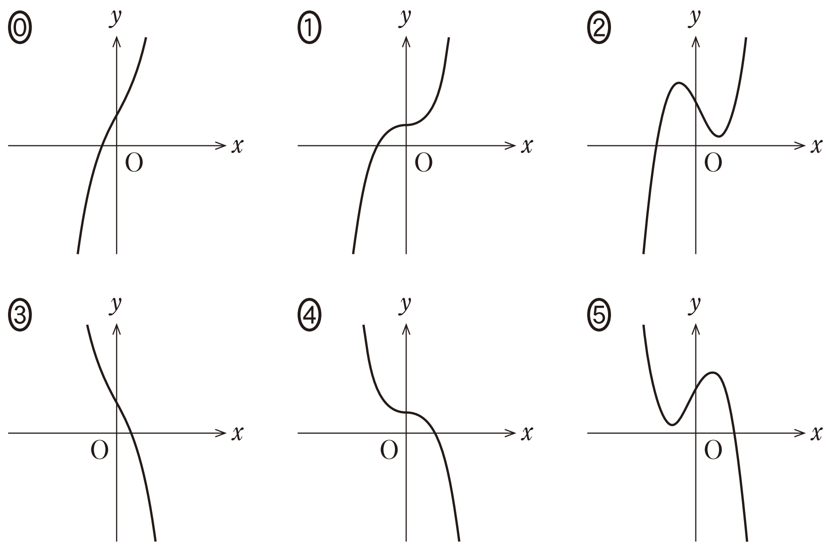
(1) $y = f(x)$ のグラフの概形は

$a = 0$ のとき， $\boxed{ア}$

$a < 0$ のとき， $\boxed{イ}$

である。

$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。



（数学Ⅱ第２問は次ページに続く。）

(2) $a > 0$ とし，p を実数とする。座標平面上の曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = p$ が 3 個の共有点をもつような p の値の範囲は $\boxed{\text{ウ}} < p < \boxed{\text{エ}}$ である。

$p = \boxed{\text{ウ}}$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = p$ は 2 個の共有点をもつ。それらの x 座標を q，r $(q < r)$ とする。曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = p$ が点 (r, p) で接することに注意すると

$$q = \boxed{\text{オカ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\,a^{\frac{1}{2}},\quad r = \sqrt{\boxed{\text{ク}}}\,a^{\frac{1}{2}}$$

と表せる。

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $2\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}} + 16$	① $-2\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}} + 16$
② $4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}} + 16$	③ $-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}} + 16$
④ $8\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}} + 16$	⑤ $-8\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}} + 16$

(3) 方程式 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数を n とする。次の⓪〜⑤のうち，正しいものは $\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$ の解答群（解答の順序は問わない。）

⓪ $n = 1$ ならば $a < 0$	① $a < 0$ ならば $n = 1$
② $n = 2$ ならば $a < 0$	③ $a < 0$ ならば $n = 2$
④ $n = 3$ ならば $a > 0$	⑤ $a > 0$ ならば $n = 3$

（数学Ⅱ第 2 問は次ページに続く。）

〔2〕 $b > 0$ とし，$g(x) = x^3 - 3bx + 3b^2$，$h(x) = x^3 - x^2 + b^2$ とおく。座標平面上の曲線 $y = g(x)$ を C_1，曲線 $y = h(x)$ を C_2 とする。

C_1 と C_2 は2点で交わる。これらの交点の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha < \beta)$ とすると，$\alpha =$ $\boxed{\text{サ}}$，$\beta =$ $\boxed{\text{シス}}$ である。

$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲で C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とする。また，$t > \beta$ とし，$\beta \leqq x \leqq t$ の範囲で C_1 と C_2 および直線 $x = t$ で囲まれた図形の面積を T とする。

このとき

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \boxed{\text{セ}}\, dx$$

$$T = \int_{\beta}^{t} \boxed{\text{ソ}}\, dx$$

$$S - T = \int_{\alpha}^{t} \boxed{\text{タ}}\, dx$$

であるので

$$S - T = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\left(2t^3 - \boxed{\text{ト}}\,bt^2 + \boxed{\text{ナニ}}\,b^2t - \boxed{\text{ヌ}}\,b^3\right)$$

が得られる。

したがって，$S = T$ となるのは $t = \dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\,b$ のときである。

（数学Ⅱ第2問は次ページに続く。）

$\boxed{\text{セ}}$ ～ $\boxed{\text{タ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\{g(x)+h(x)\}$	① $\{g(x)-h(x)\}$
② $\{h(x)-g(x)\}$	③ $\{2g(x)+2h(x)\}$
④ $\{2g(x)-2h(x)\}$	⑤ $\{2h(x)-2g(x)\}$
⑥ $2g(x)$	⑦ $2h(x)$

第３問 （配点　20）

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき

$$4\cos 2\theta + 2\cos\theta + 3 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす θ について考えよう。

(1)　$t = \cos\theta$ とおくと，t のとり得る値の範囲は $-1 \leqq t \leqq 1$ である。２倍角の公式により

$$\cos 2\theta = \boxed{\text{ア}}\,t^2 - \boxed{\text{イ}}$$

であるから，① により，t についての方程式

$$\boxed{\text{ウ}}\,t^2 + \boxed{\text{エ}}\,t - 1 = 0$$

が得られる。この方程式の解は

$$t = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}},\ \frac{1}{4}$$

である。

（数学Ⅱ第３問は次ページに続く。）

以下，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ かつ $\cos\theta = \dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ を満たす θ を α とし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ かつ $\cos\theta = \dfrac{1}{4}$ を満たす θ を β とする。

(2) $\cos\alpha = \dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ により，$\alpha = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$ であることがわかる。そこで β の値について調べてみよう。

$\cos\beta = \dfrac{1}{4}$ と

$$\cos\frac{\pi}{6} = \boxed{\text{コ}},\quad \cos\frac{\pi}{4} = \boxed{\text{サ}},\quad \cos\frac{\pi}{3} = \boxed{\text{シ}}$$

を比較することにより，β は $\boxed{\text{ス}}$ を満たすことがわかる。

$\boxed{\text{コ}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 0	① 1	② -1
③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	④ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
⑥ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	⑦ $\dfrac{1}{2}$	⑧ $-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ $0 < \beta < \dfrac{\pi}{6}$	① $\dfrac{\pi}{6} < \beta < \dfrac{\pi}{4}$
② $\dfrac{\pi}{4} < \beta < \dfrac{\pi}{3}$	③ $\dfrac{\pi}{3} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$

（数学Ⅱ第３問は次ページに続く。）

(3) β の値について，さらに詳しく調べてみよう。

2 倍角の公式を用いると

$$\cos 2\beta = \frac{\boxed{セソ}}{\boxed{タ}}, \quad \cos 4\beta = \frac{\boxed{チツ}}{\boxed{テト}}$$

であることがわかる。さらに，座標平面上で 4β の動径は第 $\boxed{ナ}$ 象限にあり，β は $\boxed{ニ}$ を満たすことがわかる。ただし，角の動径は x 軸の正の部分を始線として考えるものとする。

$\boxed{ニ}$ の解答群

⓪ $0 < \beta < \dfrac{\pi}{8}$	① $\dfrac{\pi}{8} < \beta < \dfrac{\pi}{6}$
② $\dfrac{\pi}{6} < \beta < \dfrac{3}{16}\pi$	③ $\dfrac{3}{16}\pi < \beta < \dfrac{\pi}{4}$
④ $\dfrac{\pi}{4} < \beta < \dfrac{5}{16}\pi$	⑤ $\dfrac{5}{16}\pi < \beta < \dfrac{\pi}{3}$
⑥ $\dfrac{\pi}{3} < \beta < \dfrac{3}{8}\pi$	⑦ $\dfrac{3}{8}\pi < \beta < \dfrac{5}{12}\pi$
⑧ $\dfrac{5}{12}\pi < \beta < \dfrac{7}{16}\pi$	⑨ $\dfrac{7}{16}\pi < \beta < \dfrac{\pi}{2}$

第４問 （配点　20）

m，n を実数とし，次の二つの整式 $P(x)$ と $Q(x)$ を考える。

$$P(x) = x^4 + (m-1)x^3 + 5x^2 + (m-3)x + n$$

$$Q(x) = x^2 - x + 2$$

また，$P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れるとし，$P(x)$ を $Q(x)$ で割ったときの商を $R(x)$ とおく。

⑴　2 次方程式 $Q(x) = 0$ の解は

$$x = \frac{\boxed{\text{ア}} \pm \sqrt{\boxed{\text{イ}}}\,i}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

⑵　$P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れるから，n を m を用いて表すと

$$n = \boxed{\text{エ}}\,m + \boxed{\text{オ}}$$

である。また

$$R(x) = x^2 + mx + m + \boxed{\text{カ}}$$

である。

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

(3) 方程式 $R(x)=0$ は異なる二つの虚数解 α，β をもつとする。このとき，m のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{キク}} < m < \boxed{\text{ケ}}$$

である。また

$$\alpha+\beta=\boxed{\text{コ}}\,m,\quad \alpha\beta=m+\boxed{\text{サ}}$$

である。

いま，$\alpha\beta(\alpha+\beta)=-10$ であるとする。このとき，$m=\boxed{\text{シ}}$ であり，方程式 $R(x)=0$ の虚数解は

$$x=\boxed{\text{スセ}}\pm\boxed{\text{ソ}}\,i$$

である。

(4) 方程式 $P(x)=0$ の解について考える。

異なる解が全部で3個になるのは，$m=\boxed{\text{タチ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ のときであり，そのうち虚数解は $\boxed{\text{テ}}$ 個である。

異なる解が全部で2個になるのは，$m=\boxed{\text{トナ}}$ のときである。

異なる解が全部で4個になるのは，m の値が $\boxed{\text{タチ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{トナ}}$ のいずれとも等しくないときであり，$m<\boxed{\text{タチ}}$，$\boxed{\text{ツ}}<m$ のとき，4個の解のうち虚数解は $\boxed{\text{ニ}}$ 個である。