数学Ⅱ・数学B 第3問〜第5問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい。

第3問 （選択問題）（配点 20）

数列$\{a_n\}$は，初項a_1が0であり，$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$のとき次の漸化式を満たすものとする。

$$a_{n+1} = \frac{n+3}{n+1}\{3a_n + 3^{n+1} - (n+1)(n+2)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

(1) $a_2 = \boxed{\text{ア}}$である。

(2) $b_n = \dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$とおき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよう。

$\{b_n\}$の初項b_1は$\boxed{\text{イ}}$である。①の両辺を$3^{n+1}(n+2)(n+3)$で割ると

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\left(n+\boxed{\text{エ}}\right)\left(n+\boxed{\text{オ}}\right)} - \left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n+1}$$

を得る。ただし，$\boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{オ}}$とする。

したがって

$$b_{n+1} - b_n = \left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{n+\boxed{\text{エ}}} - \frac{\boxed{\text{キ}}}{n+\boxed{\text{オ}}}\right) - \left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n+1}$$

である。

（数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。）

n を 2 以上の自然数とするとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{k+\boxed{\text{エ}}}-\frac{\boxed{\text{キ}}}{k+\boxed{\text{オ}}}\right)=\frac{1}{\boxed{\text{ク}}}\left(\frac{n-\boxed{\text{ケ}}}{n+\boxed{\text{コ}}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{k+1}=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}-\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n}$$

が成り立つことを利用すると

$$b_n=\frac{n-\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}\left(n+\boxed{\text{チ}}\right)}+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n}$$

が得られる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

(3) (2) により，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{\text{ツ}}^{\,n-\boxed{\text{テ}}}\left(n^2-\boxed{\text{ト}}\right)+\frac{\left(n+\boxed{\text{ナ}}\right)\left(n+\boxed{\text{ニ}}\right)}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

で与えられる。ただし，$\boxed{\text{ナ}}<\boxed{\text{ニ}}$ とする。

このことから，すべての自然数 n について，a_n は整数となることがわかる。

(4) k を自然数とする。a_{3k}，a_{3k+1}，a_{3k+2} を 3 で割った余りはそれぞれ $\boxed{\text{ネ}}$，$\boxed{\text{ノ}}$，$\boxed{\text{ハ}}$ である。また，$\{a_n\}$ の初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りは $\boxed{\text{ヒ}}$ である。