

数 学 II

(全問必答)

第1問 (配点 30)

[1]

(1) $8^{\frac{5}{6}} = \boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$, $\log_{27} \frac{1}{9} = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2) $y = 2^x$ のグラフと $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $\boxed{\text{カ}}$ である。

$y = 2^x$ のグラフと $y = \log_2 x$ のグラフは $\boxed{\text{キ}}$ である。

$y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは $\boxed{\text{ク}}$ である。

$y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_2 \frac{1}{x}$ のグラフは $\boxed{\text{ケ}}$ である。

$\boxed{\text{カ}} \sim \boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

① 同一のもの

② y 軸に関して対称

④ x 軸に関して対称

③ 直線 $y = x$ に関して対称

(数学II第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

(3) $x > 0$ の範囲における関数 $y = \left(\log_2 \frac{x}{4}\right)^2 - 4 \log_4 x + 3$ の最小値を求めよう。

$t = \log_2 x$ とおく。このとき、 $y = t^2 - \boxed{\text{コ}} t + \boxed{\text{サ}}$ である。

また、 x が $x > 0$ の範囲を動くとき、 t のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である。 $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

① $t > 0$

① $t > 1$

② $t > 0$ かつ $t \neq 1$

③ 実数全体

したがって、 y は $t = \boxed{\text{ス}}$ のとき、すなわち $x = \boxed{\text{セ}}$ のとき、最小値 $\boxed{\text{ソタ}}$ をとる。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

〔2〕 k を正の定数として

$$\cos^2 x - \sin^2 x + k \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots ①$$

を満たす x について考える。

(1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で ① を満たす x の個数について考えよう。

① の両辺に $\sin^2 x \cos^2 x$ をかけ、2倍角の公式を用いて変形すると

$$\left(\frac{\sin^2 2x}{\boxed{\text{チ}}} - k \right) \cos 2x = 0 \quad \dots\dots\dots ②$$

を得る。したがって、 k の値に関係なく、 $x = \frac{\pi}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときはつねに

① が成り立つ。また、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $0 < \sin^2 2x \leq 1$ であるか

ら、 $k > \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のとき、① を満たす x は $\frac{\pi}{\boxed{\text{ツ}}}$ のみである。一方、

$0 < k < \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のとき、① を満たす x の個数は $\boxed{\text{ナ}}$ 個であり、

$k = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のときは $\boxed{\text{ニ}}$ 個である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

- (2) $k = \frac{4}{25}$ とし, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で①を満たす x について考えよう。

②により $\sin 2x = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ であるから

$$\cos 2x = \frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

である。したがって

$$\cos x = \frac{\sqrt{\boxed{\text{フ}}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$$

である。

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

座標平面上で、放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ を C_1 とし、放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ を C_2 とする。

- (1) 実数 a に対して、2直線 $x = a$, $x = a + 1$ と C_1 , C_2 で囲まれた図形 D の面積 S は

$$S = \int_a^{a+1} \left(\frac{1}{\boxed{\text{ア}}} x^2 + \frac{1}{\boxed{\text{イ}}} \right) dx$$

$$= \frac{a^2}{\boxed{\text{ウ}}} + \frac{a}{\boxed{\text{エ}}} + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$$

である。 S は $a = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ で最小値 $\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ をとる。

- (2) 4点 $(a, 0)$, $(a + 1, 0)$, $(a + 1, 1)$, $(a, 1)$ を頂点とする正方形を R で表す。 a が $a \geq 0$ の範囲を動くとき、正方形 R と(1)の図形 D の共通部分の面積を T とおく。 T が最大となる a の値を求めよう。

直線 $y = 1$ は、 C_1 と $(\pm \boxed{\text{ソ}}, 1)$ で、 C_2 と $(\pm \boxed{\text{タ}}, 1)$ で交わる。
したがって、正方形 R と図形 D の共通部分が空集合にならないのは、
 $0 \leq a \leq \boxed{\text{チ}}$ のときである。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

$\square{\text{ソ}} \leq a \leq \square{\text{チ}}$ のとき、正方形 R は放物線 C_1 と x 軸の間であり、この範囲で a が増加するとき、 T は $\square{\text{ツ}}$ 。 $\square{\text{ツ}}$ に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- ① 増加する ② 減少する ③ 変化しない

したがって、 T が最大になる a の値は、 $0 \leq a \leq \square{\text{ソ}}$ の範囲にある。

$0 \leq a \leq \square{\text{ソ}}$ のとき、(1)の図形 D のうち、正方形 R の外側にある部分の面積 U は

$$U = \frac{a^3}{\square{\text{テ}}} + \frac{a^2}{\square{\text{ト}}}$$

である。よって、 $0 \leq a \leq \square{\text{ソ}}$ において

$$T = -\frac{a^3}{\square{\text{ナ}}} - \frac{a^2}{\square{\text{ニ}}} + \frac{a}{\square{\text{ヌ}}} + \frac{\square{\text{オ}}}{\square{\text{カキ}}} \dots\dots\dots \text{①}$$

である。①の右辺の増減を調べることにより、 T は

$$a = \frac{\square{\text{ネノ}} + \sqrt{\square{\text{ハ}}}}{\square{\text{ヒ}}}$$

で最大値をとることがわかる。

数学Ⅱ

第3問 (配点 20)

座標平面上に4点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $P(-1, 3)$, $Q(1, 1)$ がある。線分 PQ 上に点 R をとり、その x 座標を a とする。さらに、三角形 ABR の外接円を C とし、その中心を S とする。

(1) 点 R の座標を a を用いて表すと

$$\left(a, \boxed{\text{アイ}} + \boxed{\text{ウ}} \right)$$

である。

また、線分 AR の中点を M とする。 M の座標を a を用いて表すと

$$\left(\frac{\boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}, \frac{\boxed{\text{キク}} + \boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \right)$$

である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

数学 II

- (2) 外接円 C の中心 S は、線分 AB の垂直二等分線と、線分 AR の垂直二等分線 l との交点である。このことを用いて S の座標を求めよう。

線分 AB の垂直二等分線は y 軸である。また、 l は、(1) の点 M を通り、傾き $\frac{a + \boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}} - \boxed{\text{ス}}}$ の直線である。

以上のことから、 S の座標は

$$\left(\boxed{\text{セ}}, \frac{\boxed{\text{ソタ}} a^2 + \boxed{\text{チ}} a - \boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}} a - \boxed{\text{ト}}} \right)$$

であることがわかる。

- (3) 円 C が点 R で直線 PQ に接するときの a の値を求めよう。

C が直線 PQ に接するとき、直線 RS の傾きは $\boxed{\text{ナ}}$ である。このことと、 $-1 \leq a \leq 1$ であることから、 $a = \frac{\boxed{\text{ニ}} - \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

数学Ⅱ

第4問 (配点 20)

(1) 4次方程式 $x^4 + 2x^2 + 25 = 0$ の解を求めよう。

$t = x^2$ とおいて得られる2次方程式 $t^2 + 2t + 25 = 0$ の判別式を D とするとき

$$D = \boxed{\text{アイウ}}$$

であり、2次方程式の解は

$$t = \boxed{\text{エオ}} \pm \boxed{\text{カ}} \sqrt{\boxed{\text{キ}}} i$$

である。2乗すると虚数 t になる複素数を求める代わりに、以下のように考える。

上の4次方程式を、正の実数 A, B により $(x^2 + A)^2 - Bx^2 = 0$ と変形すると

$$A = \boxed{\text{ク}}, \quad B = \boxed{\text{ケ}}$$

である。

したがって、等式

$$(x^2 + A)^2 - Bx^2 = (x^2 + \sqrt{B}x + A)(x^2 - \sqrt{B}x + A)$$

を利用すると、4次方程式 $x^4 + 2x^2 + 25 = 0$ の解は

$$x = -\sqrt{\boxed{\text{コ}}} \pm \sqrt{\boxed{\text{サ}}} i, \quad \sqrt{\boxed{\text{コ}}} \pm \sqrt{\boxed{\text{サ}}} i$$

であることがわかる。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

- (2) q, r を実数として、整式 $P(x) = x^3 - 2x^2 + qx + 2r$ を考える。3次方程式 $P(x) = 0$ の解が -2 と二つの自然数 α, β ($\alpha < \beta$) であるとき、 α, β と q, r を求めよう。

$P(-2) = 0$ であるから、 $r = q + \boxed{\text{シ}}$ である。したがって、因数定理により

$$P(x) = (x + 2) \left(x^2 - \boxed{\text{ス}}x + q + \boxed{\text{セ}} \right)$$

となる。

ここで、2次方程式

$$x^2 - \boxed{\text{ス}}x + q + \boxed{\text{セ}} = 0$$

は、二つの自然数 α, β ($\alpha < \beta$) を解にもつから

$$\alpha = \boxed{\text{ソ}}, \quad \beta = \boxed{\text{タ}}, \quad q = \boxed{\text{チツ}}, \quad r = \boxed{\text{テ}}$$

である。