数　学　I

（全　問　必　答）

第1問 （配点　25）

〔1〕 x は正の実数で，$x^2 + \dfrac{4}{x^2} = 9$ を満たすとする。このとき

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = \boxed{\text{アイ}}$$

であるから，$x + \dfrac{2}{x} = \sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$ である。さらに

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{8}{x^3} &= \left(x + \frac{2}{x}\right)\left(x^2 + \frac{4}{x^2} - \boxed{\text{ウ}}\right) \\ &= \boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オカ}}} \end{aligned}$$

である。また

$$x^4 + \frac{16}{x^4} = \boxed{\text{キク}}$$

である。

（数学 I 第1問は次ページに続く。）

また，$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^2=\boxed{\text{ケ}}$ である。$x-\dfrac{2}{x}<0$ のときは

$x-\dfrac{2}{x}=-\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ であり，したがって，このとき

$$x=\frac{\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}-\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

（数学Ⅰ第１問は次ページに続く。）

〔2〕 実数 x に関する 2 つの条件 p, q を

$$p: \ x = 1$$
$$q: \ x^2 = 1$$

とする。また，条件 p, q の否定をそれぞれ $\overline{p}$, $\overline{q}$ で表す。

(1) 次の $\boxed{セ}$, $\boxed{ソ}$, $\boxed{タ}$, $\boxed{チ}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

q は p であるための $\boxed{セ}$ 。

$\overline{p}$ は q であるための $\boxed{ソ}$ 。

(p または $\overline{q}$) は q であるための $\boxed{タ}$ 。

($\overline{p}$ かつ q) は q であるための $\boxed{チ}$ 。

⓪ 必要条件だが十分条件でない
① 十分条件だが必要条件でない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

(数学 I 第 1 問は次ページに続く。)

(2) 実数 x に関する条件 r を

$$r:\ x > 0$$

とする。次の $\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

3つの命題

A：「(p かつ q) $\Longrightarrow r$」

B：「$q \Longrightarrow r$」

C：「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」

の真偽について正しいものは $\boxed{\text{ツ}}$ である。

⓪ Aは真，Bは真，Cは真

① Aは真，Bは真，Cは偽

② Aは真，Bは偽，Cは真

③ Aは真，Bは偽，Cは偽

④ Aは偽，Bは真，Cは真

⑤ Aは偽，Bは真，Cは偽

⑥ Aは偽，Bは偽，Cは真

⑦ Aは偽，Bは偽，Cは偽

第2問 (配点 25)

a は定数とする。

(1) $f(x)=(x-3a^2-5a)^2-(3a^2-4)^2$ とおく。このとき

$$f(x)=\left(x-5a-\boxed{\text{ア}}\right)\left(x-\boxed{\text{イ}}a^2-5a+\boxed{\text{ウ}}\right)$$

である。したがって，2次関数 $y=f(x)$ のグラフが原点を通るのは，a の値が小さい方から

$$a=-\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\quad -\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}},\quad \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

のときである。

(数学 I 第2問は次ページに続く。)

(2) $g(x) = x^2 - 2(3a^2 + 5a)x + 18a^4 + 30a^3 + 49a^2 + 16$ とおく。2次関数 $y = g(x)$ のグラフの頂点は

$$\left(\boxed{\text{コ}}\,a^2 + \boxed{\text{サ}}\,a,\ \boxed{\text{シ}}\,a^4 + \boxed{\text{スセ}}\,a^2 + \boxed{\text{ソタ}}\right)$$

である。a が実数全体を動くとき，頂点の x 座標の最小値は $-\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である。次に，$t = a^2$ とおくと，頂点の y 座標は

$$\boxed{\text{シ}}\,t^2 + \boxed{\text{スセ}}\,t + \boxed{\text{ソタ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表せる。したがって，a が実数全体を動くとき，頂点の y 座標の最小値は $\boxed{\text{ナニ}}$ である。また，上の式①は

$$\left(\boxed{\text{ヌ}}\,t + \boxed{\text{ネ}}\right)^2$$

と変形できる。頂点の y 座標が 10000 以下になる a の値の範囲は

$$\boxed{\text{ノハ}}\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}} \leqq a \leqq \boxed{\text{フ}}\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}$$

である。

第3問 （配点　30）

$\triangle$ABC において，AB $= \sqrt{3} - 1$，BC $= \sqrt{3} + 1$，$\angle$ABC $= 60^\circ$ とする。

(1) AC $= \sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ であるから，$\triangle$ABC の外接円の半径は $\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ であり

$$\sin \angle \mathrm{BAC} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答の順序は問わない。

(2) 辺 AC 上に点 D を，$\triangle$ABD の面積が $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ になるようにとるとき

$$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AD} = \frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}} - \boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

であるから，AD $= \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

（数学Ⅰ第3問は次ページに続く。）

(3) 点Cから直線ABに下ろした垂線と直線ABとの交点をEとすると，

$$\mathrm{CE} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}} + \boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$ であるから

$$\cos \angle\mathrm{ACE} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}} + \sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ の解答の順序は問わない。

また

$$\cos \angle\mathrm{ACB} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ツ}}} + \sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

であることから，$\angle\mathrm{ACE} = \boxed{\text{ナニ}}^\circ$ である。ただし，$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{テ}}$ の解答の順序は問わない。

したがって

$$\tan \boxed{\text{ナニ}}^\circ = \boxed{\text{ヌ}} - \sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$$

である。

第 4 問 (配点 20)

スキージャンプは，飛距離および空中姿勢の美しさを競う競技である。選手は斜面を滑り降り，斜面の端から空中に飛び出す。飛距離 D(単位は m)から得点 X が決まり，空中姿勢から得点 Y が決まる。ある大会における 58 回のジャンプについて考える。

(1) 得点 X，得点 Y および飛び出すときの速度 V(単位は km/h)について，図 1 の 3 つの散布図を得た。

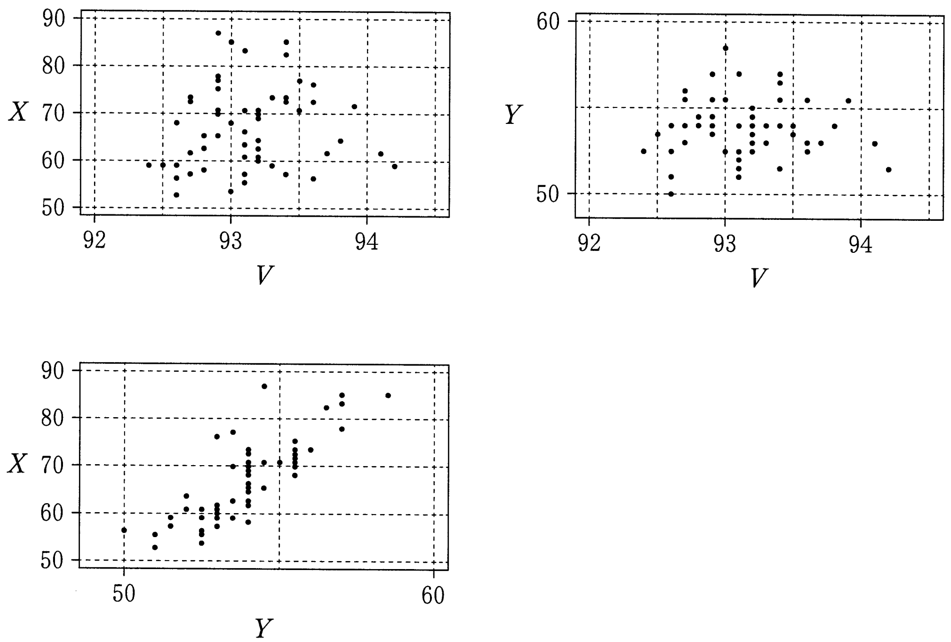

図 1

(出典：国際スキー連盟の Web ページにより作成)

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

次の $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑥のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

図1から読み取れることとして正しいものは，$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ である。

⓪ X と V の間の相関は，X と Y の間の相関より強い。

① X と Y の間には正の相関がある。

② V が最大のジャンプは，X も最大である。

③ V が最大のジャンプは，Y も最大である。

④ Y が最小のジャンプは，X は最小ではない。

⑤ X が 80 以上のジャンプは，すべて V が 93 以上である。

⑥ Y が 55 以上かつ V が 94 以上のジャンプはない。

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

(2) 得点 X は，飛距離 D から次の計算式によって算出される。

$$X = 1.80 \times (D - 125.0) + 60.0$$

次の $\boxed{\text{エ}}$ ，$\boxed{\text{オ}}$ ，$\boxed{\text{カ}}$ にそれぞれ当てはまるものを，下の⓪〜⑥のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

- X の分散は，D の分散の $\boxed{\text{エ}}$ 倍になる。
- X と Y の共分散は，D と Y の共分散の $\boxed{\text{オ}}$ 倍である。ただし，共分散は，2つの変量のそれぞれにおいて平均値からの偏差を求め，偏差の積の平均値として定義される。
- X と Y の相関係数は，D と Y の相関係数の $\boxed{\text{カ}}$ 倍である。

⓪ -125	① -1.80	② 1	③ 1.80
④ 3.24	⑤ 3.60	⑥ 60.0	

(数学Ⅰ第4問は16ページに続く。)

(3) 58回のジャンプは29名の選手が2回ずつ行ったものである。1回目の$X+Y$(得点Xと得点Yの和)の値に対するヒストグラムと2回目の$X+Y$の値に対するヒストグラムは図2のA，Bのうちのいずれかである。また，1回目の$X+Y$の値に対する箱ひげ図と2回目の$X+Y$の値に対する箱ひげ図は図3のa，bのうちのいずれかである。ただし，1回目の$X+Y$の最小値は108.0であった。

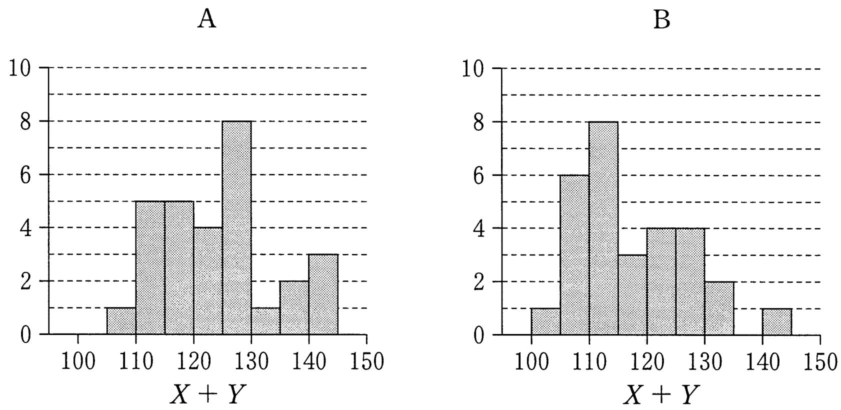

図　2

(出典：国際スキー連盟のWebページにより作成)

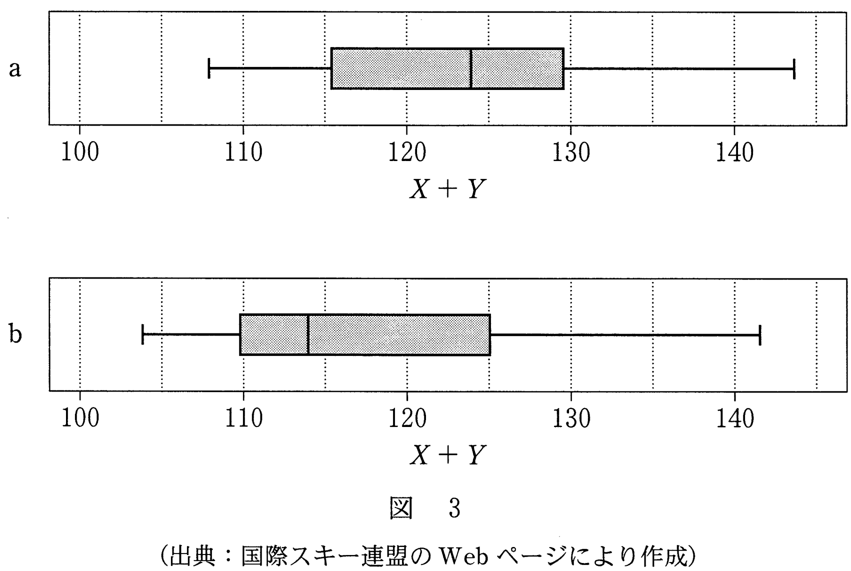

図　3

(出典：国際スキー連盟のWebページにより作成)

(数学Ⅰ第4問は次ページに続く。)

次の $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，下の表の⓪～③のうちから一つ選べ。

1回目の $X+Y$ の値について，ヒストグラムおよび箱ひげ図の組合せとして正しいものは，$\boxed{\text{キ}}$ である。

	⓪	①	②	③
ヒストグラム	A	A	B	B
箱ひげ図	a	b	a	b

次の $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

図3から読み取れることとして正しいものは，$\boxed{\text{ク}}$ である。

⓪ 1回目の $X+Y$ の四分位範囲は，2回目の $X+Y$ の四分位範囲より大きい。

① 1回目の $X+Y$ の中央値は，2回目の $X+Y$ の中央値より大きい。

② 1回目の $X+Y$ の最大値は，2回目の $X+Y$ の最大値より小さい。

③ 1回目の $X+Y$ の最小値は，2回目の $X+Y$ の最小値より小さい。

（数学Ⅰ第4問は次ページに続く。）

(4) 58回のジャンプでは，斜面上の高さが異なる3つの地点がスタート位置として用いられた。これらを「高」，「中」，「低」と表し，スタート位置に応じて得点Xから得点X'を次のように定める。

スタート位置が「高」のとき，$X' = X$
スタート位置が「中」のとき，$X' = X + 3.8$
スタート位置が「低」のとき，$X' = X + 7.6$

得点XおよびX'について，スタート位置ごとに箱ひげ図を描いたものが図4である。

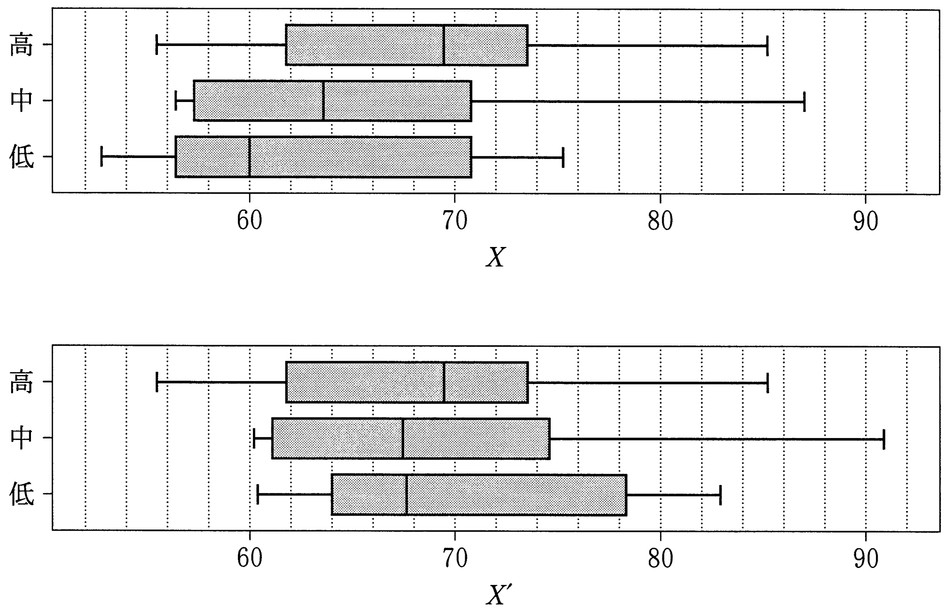

図　4

（出典：国際スキー連盟のWebページにより作成）

（数学Ⅰ第4問は次ページに続く。）

次の $\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～④のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

図 4 に関する記述として正しいものは，$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$ である。

⓪ X および X' の両方において，スタート位置が高いほど，中央値も大きくなっている。

① X ではスタート位置が高いほど中央値も大きくなっているのに対し，X' ではスタート位置によらず中央値が 66 以上 70 未満の区間に入っている。

② どのスタート位置の場合でも，X の四分位範囲と X' の四分位範囲は等しい。

③ X および X' の両方において，スタート位置が高いほど第 1 四分位数が大きくなっている。

④ X および X' の両方において，スタート位置が高いほど第 3 四分位数が大きくなっている。