

数 学 II

(全問必答)

第1問 (配点 30)

〔1〕 連立方程式

$$\begin{cases} \cos 2\alpha + \cos 2\beta = \frac{4}{15} & \dots\dots\dots ① \\ \cos \alpha \cos \beta = -\frac{2\sqrt{15}}{15} & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

を考える。ただし、 $0 \leq \alpha \leq \pi$ 、 $0 \leq \beta \leq \pi$ であり、 $\alpha < \beta$ かつ

$$|\cos \alpha| \geq |\cos \beta| \quad \dots\dots\dots ③$$

とする。このとき、 $\cos \alpha$ と $\cos \beta$ の値を求めよう。

2倍角の公式を用いると、①から

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$$

が得られる。また、②から、 $\cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \frac{\boxed{\text{オ}}}{15}$ である。

(数学II第1問は次ページに続く。)

したがって、条件③を用いると

$$\cos^2 \alpha = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}, \quad \cos^2 \beta = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。よって、②と条件 $0 \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $\alpha < \beta$ から

$$\cos \alpha = \frac{\boxed{\text{コ}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}, \quad \cos \beta = \frac{\boxed{\text{ス}} \sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

- 〔2〕 座標平面上に点 $A\left(0, \frac{3}{2}\right)$ をとり、関数 $y = \log_2 x$ のグラフ上に 2 点 $B(p, \log_2 p)$ 、 $C(q, \log_2 q)$ をとる。線分 AB を 1 : 2 に内分する点が C であるとき、 p 、 q の値を求めよう。

真数の条件により、 $p > \boxed{\text{タ}}$ 、 $q > \boxed{\text{タ}}$ である。ただし、対数 $\log_a b$ に対し、 a を底といい、 b を真数という。

線分 AB を 1 : 2 に内分する点の座標は、 p を用いて

$$\left(\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} p, \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \log_2 p + \boxed{\text{ナ}} \right)$$

と表される。これが C の座標と一致するので

$$\begin{cases} \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} p = q & \dots\dots\dots \text{④} \\ \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \log_2 p + \boxed{\text{ナ}} = \log_2 q & \dots\dots\dots \text{⑤} \end{cases}$$

が成り立つ。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

⑤は

$$p = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{又}}} q^{\boxed{\text{ネ}}} \dots\dots\dots \text{⑥}$$

と変形できる。④と⑥を連立させた方程式を解いて、 $p > \boxed{\text{タ}}$,

$q > \boxed{\text{タ}}$ に注意すると

$$p = \boxed{\text{ノ}} \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}, \quad q = \boxed{\text{ヒ}} \sqrt{\boxed{\text{フ}}}$$

である。

また、Cのy座標 $\log_2(\boxed{\text{ヒ}} \sqrt{\boxed{\text{フ}}})$ の値を、小数第2位を四捨五入して小数第1位まで求めると、 $\boxed{\text{へ}}$ である。 $\boxed{\text{へ}}$ に当てはまるものを、次の①～⑥のうちから一つ選べ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

- | | | | | | | | | | | | |
|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|
| ① | 0.3 | ② | 0.6 | ③ | 0.9 | ④ | 1.3 | ⑤ | 1.6 | ⑥ | 1.9 |
| ⑦ | 2.3 | ⑧ | 2.6 | ⑨ | 2.9 | Ⓐ | 3.3 | Ⓑ | 3.6 | Ⓒ | 3.9 |

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

O を原点とする座標平面上の放物線 $y = x^2 + 1$ を C とし、点 $(a, 2a)$ を P とする。

- (1) 点 P を通り、放物線 C に接する直線の方程式を求めよう。

C 上の点 $(t, t^2 + 1)$ における接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ア}} tx - t^2 + \boxed{\text{イ}}$$

である。この直線が P を通るとすると、 t は方程式

$$t^2 - \boxed{\text{ウ}} at + \boxed{\text{エ}} a - \boxed{\text{オ}} = 0$$

を満たすから、 $t = \boxed{\text{カ}} a - \boxed{\text{キ}}$ 、 $\boxed{\text{ク}}$ である。よって、 $a \neq \boxed{\text{ケ}}$ のとき、 P を通る C の接線は 2 本あり、それらの方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{コ}} a - \boxed{\text{サ}} \right) x - \boxed{\text{シ}} a^2 + \boxed{\text{ス}} a \cdots \cdots \text{①}$$

と

$$y = \boxed{\text{セ}} x$$

である。

- (2) (1)の方程式①で表される直線を l とする。 l と y 軸との交点を $R(0, r)$

とすると、 $r = -\boxed{\text{シ}} a^2 + \boxed{\text{ス}} a$ である。 $r > 0$ となるのは、

$\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のときであり、このとき、三角形 OPR の面積 S は

$$S = \boxed{\text{チ}} \left(a \boxed{\text{ツ}} - a \boxed{\text{テ}} \right)$$

となる。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

$\square{\text{ソ}} < a < \square{\text{タ}}$ のとき、 S の増減を調べると、 S は $a = \frac{\square{\text{ト}}}{\square{\text{ナ}}}$

で最大値 $\frac{\square{\text{ニ}}}{\square{\text{ヌネ}}}$ をとることがわかる。

(3) $\square{\text{ソ}} < a < \square{\text{タ}}$ のとき、放物線 C と(2)の直線 l および 2 直線 $x = 0$ 、 $x = a$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T = \frac{\square{\text{ノ}}}{\square{\text{ハ}}} a^3 - \square{\text{ヒ}} a^2 + \square{\text{フ}}$$

である。 $\frac{\square{\text{ト}}}{\square{\text{ナ}}} \leq a < \square{\text{タ}}$ の範囲において、 T は $\square{\text{ヘ}}$ 。 $\square{\text{ヘ}}$

に当てはまるものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | |
|---------|--------------------|
| ① 減少する | ① 極小値をとるが、極大値はとらない |
| ② 増加する | ③ 極大値をとるが、極小値はとらない |
| ④ 一定である | ⑤ 極小値と極大値の両方をとる |

数学Ⅱ

第3問 (配点 20)

座標平面上に2点 $A(0, 3)$, $B(8, 9)$ をとる。

(1) 2点 A , B を通る直線の方程式は $y = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x + \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) 線分 AB の長さは $\boxed{\text{エオ}}$ である。

(3) 線分 AB を直径とする円 C の方程式は

$$(x - \boxed{\text{カ}})^2 + (y - \boxed{\text{キ}})^2 = \boxed{\text{クケ}}$$

である。また、 A における C の接線の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}x + \boxed{\text{ス}} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

(4) 三角形 ABP の面積が 20 である点 P の軌跡は、2 直線

$$y = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}x + \boxed{\text{タ}} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

と

$$y = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}x - \boxed{\text{チ}}$$

である。

(5) 直線 ① と直線 ② の交点の x 座標は $\frac{\boxed{\text{ツテト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ であり、円 C と直線 ② の

交点の x 座標は $\boxed{\text{ニ}}$ と $\frac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

(6) 三角形 ABP の面積が 20 であり、かつ三角形 ABP が直角三角形であるような点 P は全部で $\boxed{\text{ハ}}$ 個ある。

数学Ⅱ

第4問 (配点 20)

- (1) 4次式 $P(x)$ は、 x^4 の係数が1で、 $x^2 - 2x + 3$ で割り切れるとする。また、 $P(x)$ は $P(1) = 12$ 、 $P(2) = 15$ を満たすとする。

$P(x)$ を $x^2 - 2x + 3$ で割った商を $S(x) = x^2 + mx + n$ (m, n は実数)

とおくと、 $S(1) = \boxed{\text{ア}}$ 、 $S(2) = \boxed{\text{イ}}$ であるから、 $m = \boxed{\text{ウエ}}$ 、

$n = \boxed{\text{オ}}$ である。方程式 $S(x) = 0$ の解は

$$\boxed{\text{カ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{キ}}} i$$

である。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

(2) 2次式 $Q(x) = x^2 + kx + \ell$ (k, ℓ は実数) を考える。 c を正の実数として、
 $a = c + \frac{1}{c}i$ とする。方程式 $Q(x) = 0$ は複素数 a を解にもつとする。

$Q(x)$ の x に a を代入すると

$$Q(a) = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{c^2} + c^2 + \boxed{\text{コ}}k + \ell + \left(\boxed{\text{サ}} + \frac{k}{c} \right) i$$

となる。 k, ℓ を c を用いて表すと、 $k = \boxed{\text{シスセ}}$, $\ell = \frac{c^{\boxed{\text{ソ}}} + \boxed{\text{タ}}}{c^2}$ である。

二項定理から、 a の4乗は $a^4 = \boxed{\text{チ}} + \boxed{\text{ツ}}i$ となる。 $\boxed{\text{チ}}$, $\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを、次の①~⑩のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを選んでもよい。

- | | | |
|--|--|---|
| ① $3\left(c^2 + \frac{1}{c^2}\right)$ | ② $4\left(c^2 + \frac{1}{c^2}\right)$ | ③ $6\left(c^2 + \frac{1}{c^2}\right)$ |
| ④ $3\left(c^2 - \frac{1}{c^2}\right)$ | ⑤ $4\left(c^2 - \frac{1}{c^2}\right)$ | ⑥ $6\left(c^2 - \frac{1}{c^2}\right)$ |
| ⑦ $\left(c^4 + \frac{1}{c^4} + 4\right)$ | ⑧ $\left(c^4 + \frac{1}{c^4} + 6\right)$ | ⑨ $\left(c^4 + \frac{1}{c^4} + 10\right)$ |
| ⑩ $\left(c^4 + \frac{1}{c^4} - 4\right)$ | ⑪ $\left(c^4 + \frac{1}{c^4} - 6\right)$ | ⑫ $\left(c^4 + \frac{1}{c^4} - 10\right)$ |

相加平均と相乗平均の関係から、 c が $c > 0$ の範囲を動くとき、 a^4 の実部 $\boxed{\text{チ}}$ は $c = \boxed{\text{テ}}$ で最小値 $\boxed{\text{トナ}}$ をとり、そのとき、 $k = \boxed{\text{ニヌ}}$, $\ell = \boxed{\text{ネ}}$ である。