数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問（配点　30）

〔１〕　関数 $y = -2^{2x} + 2^{x+4} - 48$ について考える。

(1)　$t = 2^x$ とおく。y を t の式で表すと

$$y = \boxed{\text{ア}}\left(t - \boxed{\text{イ}}\right)^2 + \boxed{\text{ウエ}}$$

となる。

$x = 1$ のとき，$y = \boxed{\text{オカキ}}$ である。$x \geqq 1$ のとき，y は $x = \boxed{\text{ク}}$ で最大値 $\boxed{\text{ケコ}}$ をとる。

(2)　$k > 1$ とする。x が $1 \leqq x \leqq k$ の範囲を動くとき，y の最小値が $\boxed{\text{オカキ}}$ であるような k の値の範囲は

$$1 < k \leqq \log_2 \boxed{\text{サシ}}$$

である。この範囲に含まれる最大の整数の値は $\boxed{\text{ス}}$ である。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(3) $y=0$ を満たす x は二つある。そのうちの小さい方は $\boxed{\text{セ}}$ である。また，大きい方は $\boxed{\text{ソ}}$ を満たす。$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つ選べ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

⓪ $1<x<1.2$　① $1.2<x<1.3$　② $1.5<x<1.6$

③ $2.4<x<2.5$　④ $2.5<x<2.6$　⑤ $2.6<x<2.8$

⑥ $3.5<x<3.6$　⑦ $3.6<x<3.8$　⑧ $4.2<x<4.4$

⑨ $x>10$

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

〔2〕 関数 $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos 3x$ について考える。

(1) 三角関数の加法定理および合成を用いると

$$f(x)=-\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\sin 3x+\frac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{チ}}}\cos 3x$$

$$=\boxed{\text{ト}}\sin\left(3x+\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}\pi\right)$$

と表される。ただし，$0<\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}\pi\leqq 2\pi$ とする。

したがって，$f(x)$ の最大値は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。また，$f(x)$ の正の周期のうち最小のものは $\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\pi$ である。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(2) $f(x)$を $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で考えたとき，実数 t に対して$f(x)=t$ となる x の値の個数 N を調べよう。$3x+\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}\pi$ のとり得る値の範囲に注意すると，次のことがわかる。

$|t|>\boxed{\text{ヌ}}$ のとき，$N=\boxed{\text{ハ}}$ である。

$t=\boxed{\text{ヌ}}$ のとき，$N=\boxed{\text{ヒ}}$ である。

$t=f(0)$のとき，$N=\boxed{\text{フ}}$ である。

$|t|<\boxed{\text{ヌ}}$ かつ $t \neq f(0)$のとき，$N=\boxed{\text{ヘ}}$ である。

$t=-\boxed{\text{ヌ}}$ のとき，$N=\boxed{\text{ホ}}$ である。

第２問　（配点　30）

a，b，c を実数とし，関数 $f(x) = x^3 - 1$，$g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える。座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C_1 とし，曲線 $y = g(x)$ を C_2 とする。C_2 は点 A$(-1,\ -2)$ を通り，C_2 の A における接線は C_1 の A における接線と一致するものとする。

(1)　曲線 C_1 の点 A における接線を ℓ とする。$f'(-1) = \boxed{\text{ア}}$ により，ℓ の方程式は $y = \boxed{\text{イ}}\,x + \boxed{\text{ウ}}$ である。また，原点 O と直線 ℓ の距離は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である。

(2)　曲線 C_2 の点 A における接線は(1)の直線 ℓ と一致しているので，$g'(-1) = \boxed{\text{カ}}$ である。したがって，b，c を a を用いて表すと，$b = \boxed{\text{キ}}\,a$，$c = \boxed{\text{ク}} - \boxed{\text{ケ}}$ となる。

（数学Ⅱ第２問は次ページに続く。）

(3) $a = -2$ のとき，関数 $g(x)$ は $x = \dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ で極大値 $\dfrac{\boxed{\text{スセソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ をとり，

$x = \boxed{\text{ツ}}$ で極小値 $\boxed{\text{テトナ}}$ をとる。

(4) $a < 0$ とする。$-2 \leqq x \leqq -1$ において，曲線 C_1 と C_2 および直線 $x = -2$ で囲まれた図形の面積を S_1 とする。また，$-1 \leqq x \leqq 1$ において，曲線 C_1 と C_2 および直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S = S_1 + S_2$ とおくと，$S = \boxed{\text{ニ}}$ と表される。$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \{g(x) - f(x)\}\,dx + \int_{-1}^{1} \{f(x) - g(x)\}\,dx$

① $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \{f(x) - g(x)\}\,dx + \int_{-1}^{1} \{g(x) - f(x)\}\,dx$

② $\displaystyle\int_{-2}^{1} \{g(x) - f(x)\}\,dx$

③ $\displaystyle\int_{-2}^{1} \{f(x) - g(x)\}\,dx$

これを計算することにより，$S = \boxed{\text{ヌネ}}\,a$ となる。

第３問 （配点　20）

座標平面上に点 $A(1, 1)$ がある。直線 $y = 2x - 1$ を ℓ_1 とする。また，A を通り，ℓ_1 に垂直な直線を ℓ_2 とする。さらに，ℓ_1 と x 軸との交点を B，ℓ_2 と x 軸との交点を C とする。

(1)　直線 ℓ_2 の方程式は $x + \boxed{\text{ア}}\,y - \boxed{\text{イ}} = 0$ である。また，点 B，C の座標は，それぞれ

$$B\left(\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\ 0\right),\qquad C\left(\boxed{\text{オ}},\ 0\right)$$

である。

(2)　3 点 A，B，C を通る円の方程式は

$$x^2 + y^2 - \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}x + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} = 0$$

である。

（数学Ⅱ第３問は次ページに続く。）

(3) k を実数とし，直線 ℓ_1 と直線 $y = k$ との交点を D，直線 ℓ_2 と直線 $y = k$ との交点を E とする。点 D，E の座標は，それぞれ

$$\mathrm{D}\left(\frac{k + \boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}},\ k\right),\qquad \mathrm{E}\left(\boxed{\text{シス}}\,k + \boxed{\text{セ}},\ k\right)$$

である。特に，$k = \boxed{\text{ソ}}$ のときは，点 D，E がそれぞれ点 B，C に一致する。また，$k = 1$ のときは，点 D，E はともに点 A に一致する。

次に，1 でない実数 k について，△ABC と△ADE の面積を比較しよう。

△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ であり，△ADE の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\left(k - \boxed{\text{ト}}\right)^{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

△ADE の面積と△ABC の面積が等しくなるのは，$k = \boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{ニ}}$ のときである。また，△ADE の面積が△ABC の面積の 2 倍となるのは，$k = \boxed{\text{ヌ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$ のときである。

第４問 （配点　20）

a，b，s，tを実数とし，整式$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$を$f(x)=(x-a)x+s$，$g(x)=(x-b)x+t$，$h(x)=f(x)f(x-3)+g(x)g(x-3)$とする。

(1)　$s=t=0$とする。このとき

$$f(x)f(x-3)=x(x-3)\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)\left(x-\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\right)$$

$$g(x)g(x-3)=x(x-3)\left(x-\boxed{\text{ウ}}\right)\left(x-\boxed{\text{ウ}}-\boxed{\text{エ}}\right)$$

である。よって，$h(x)$は$x(x-3)$で割り切れる。その商を$Q(x)$とすると

$$Q(x)=\boxed{\text{オ}}x^2-\boxed{\text{カ}}\left(a+b+\boxed{\text{キ}}\right)x$$
$$+a^2+b^2+\boxed{\text{ク}}(a+b)$$

となる。２次方程式$Q(x)=0$が虚数解をもつための必要十分条件は，$(a-b)^2-\boxed{\text{ケ}}$の値が$\boxed{\text{コ}}$となることである。ただし，$\boxed{\text{コ}}$については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪　0　　①　正　　②　負

③　0以上　　④　0以下

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

(2) $a = 1$, $b = -2$ とする。このとき，$h(x)$ が $x(x-3)$ で割り切れるような s，t の値をすべて求めよう。

整式 $h(x)$ が $x(x-3)$ で割り切れるための必要十分条件は

$$h\left(\boxed{\text{サ}}\right) = h\left(\boxed{\text{シ}}\right) = 0$$

である。ただし，$\boxed{\text{サ}} < \boxed{\text{シ}}$ とする。

この条件を s，t を用いて表すと

$$s^{\boxed{\text{ス}}} + t^{\boxed{\text{ス}}} + \boxed{\text{セソ}}\,s + 3t = 0$$

$$s^{\boxed{\text{ス}}} + t^{\boxed{\text{ス}}} + 6s + \boxed{\text{タチ}}\,t = 0$$

となる。これら二つの式の差と和を考えることにより，$h(x)$ が $x(x-3)$ で割り切れるための必要十分条件は

$$s - \boxed{\text{ツ}}\,t = 0, \qquad s^{\boxed{\text{ス}}} + t^{\boxed{\text{ス}}} + \boxed{\text{テ}}\,(s+t) = 0$$

であることがわかる。

よって，$h(x)$ が $x(x-3)$ で割り切れるような s，t の値は，$s = t = 0$ と

$$s = -\frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}, \qquad t = -\frac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

である。