第 3 問～第 5 問は，**いずれか 2 問を選択**し，解答しなさい。

第 3 問 （選択問題）（配点　20）

数列$\{a_n\}$は，初項a_1が 0 であり，$n = 1, 2, 3, \cdots$ のとき次の漸化式を満たすものとする。

$$a_{n+1} = \frac{n+3}{n+1}\{3a_n + 3^{n+1} - (n+1)(n+2)\} \quad \cdots\cdots ①$$

(1)　$a_2 = \boxed{\text{ア}}$ である。

(2)　$b_n = \dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$とおき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよう。

$\{b_n\}$の初項b_1は $\boxed{\textbf{イ}}$ である。① の両辺を$3^{n+1}(n+2)(n+3)$で割ると

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\boxed{\textbf{ウ}}}{\left(n+\boxed{\textbf{エ}}\right)\left(n+\boxed{\textbf{オ}}\right)} - \left(\frac{1}{\boxed{\textbf{カ}}}\right)^{n+1}$$

を得る。ただし，$\boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{オ}}$ とする。

したがって

$$b_{n+1} - b_n = \left(\frac{\boxed{\textbf{キ}}}{n+\boxed{\text{エ}}} - \frac{\boxed{\text{キ}}}{n+\boxed{\text{オ}}}\right) - \left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n+1}$$

である。

n を 2 以上の自然数とするとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{k+\boxed{\text{エ}}}-\frac{\boxed{\text{キ}}}{k+\boxed{\text{オ}}}\right)$$

$$=\frac{1}{\boxed{\textbf{ク}}}\left(\frac{n-\boxed{\textbf{ケ}}}{n+\boxed{\textbf{コ}}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{k+1}=\frac{\boxed{\textbf{サ}}}{\boxed{\textbf{シ}}}-\frac{\boxed{\textbf{ス}}}{\boxed{\textbf{セ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n}$$

が成り立つことを利用すると

$$b_n=\frac{n-\boxed{\textbf{ソ}}}{\boxed{\textbf{タ}}\left(n+\boxed{\textbf{チ}}\right)}+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n}$$

が得られる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

(3) 17 ページの(2)により，$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{ツ}}^{\,n-\boxed{\text{テ}}}\left(n^2-\boxed{\text{ト}}\right)$$
$$+\frac{\left(n+\boxed{\text{ナ}}\right)\left(n+\boxed{\text{ニ}}\right)}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

で与えられる。ただし，$\boxed{\text{ナ}} < \boxed{\text{ニ}}$ とする。

このことから，すべての自然数 n について，a_n は整数となることがわかる。

(4) k を自然数とする。a_{3k}，a_{3k+1}，a_{3k+2} を 3 で割った余りはそれぞれ $\boxed{\text{ネ}}$，$\boxed{\text{ノ}}$，$\boxed{\text{ハ}}$ である。また，$\{a_n\}$の初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りは $\boxed{\text{ヒ}}$ である。