数　学　Ⅱ

(全　問　必　答)

第1問　(配点　30)

〔1〕 Oを原点とする座標平面において，点$\mathrm{P}(p,\ q)$を中心とする円Cが，方程式$y=\dfrac{4}{3}x$で表される直線ℓに接しているとする。

(1) 円Cの半径rを求めよう。

点Pを通り直線ℓに垂直な直線の方程式は

$$y=-\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}(x-p)+q$$

なので，Pからℓに引いた垂線とℓの交点Qの座標は

$$\left(\frac{3}{25}\left(\boxed{\text{ウ}}\,p+\boxed{\text{エ}}\,q\right),\quad \frac{4}{25}\left(\boxed{\text{ウ}}\,p+\boxed{\text{エ}}\,q\right)\right)$$

となる。

求めるCの半径rは，Pとℓの距離PQに等しいので

$$r=\frac{1}{5}\left|\boxed{\text{オ}}\,p-\boxed{\text{カ}}\,q\right| \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(2) 円 C が，x 軸に接し，点 $\mathrm{R}(2,\ 2)$ を通る場合を考える。このとき，$p > 0$，$q > 0$ である。C の方程式を求めよう。

C は x 軸に接するので，C の半径 r は q に等しい。したがって，① により，$p = \boxed{\text{キ}}\, q$ である。

C は点 R を通るので，求める C の方程式は

$$\left(x - \boxed{\text{ク}}\right)^2 + \left(y - \boxed{\text{ケ}}\right)^2 = \boxed{\text{コ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

または

$$\left(x - \boxed{\text{サ}}\right)^2 + \left(y - \boxed{\text{シ}}\right)^2 = \boxed{\text{ス}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

であることがわかる。ただし，$\boxed{\text{コ}} < \boxed{\text{ス}}$ とする。

(3) 方程式 ② の表す円の中心を S，方程式 ③ の表す円の中心を T とおくと，直線 ST は原点 O を通り，点 O は線分 ST を $\boxed{\text{セ}}$ する。$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 1：1 に内分	① 1：2 に内分	② 2：1 に内分
③ 1：1 に外分	④ 1：2 に外分	⑤ 2：1 に外分

(数学Ⅱ第１問は次ページに続く。)

〔2〕 自然数 m, n に対して，不等式

$$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leqq 3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

を考える。

$m = 2$, $n = 1$ のとき，$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \boxed{ソ}$ であり，この m, n の値の組は ④ を満たす。

$m = 4$, $n = 3$ のとき，$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \boxed{タ}$ であり，この m, n の値の組は ④ を満たさない。

不等式 ④ を満たす自然数 m, n の組の個数を調べよう。④ は

$$\log_2 m + \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}} \log_3 n \leqq \boxed{テ} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

と変形できる。

n が自然数のとき，$\log_3 n$ のとり得る最小の値は $\boxed{ト}$ であるから，⑤ により，$\log_2 m \leqq \boxed{テ}$ でなければならない。$\log_2 m \leqq \boxed{テ}$ により，$m = \boxed{ナ}$ または $m = \boxed{ニ}$ でなければならない。ただし，$\boxed{ナ} < \boxed{ニ}$ とする。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

$m=\boxed{\text{ナ}}$ の場合，⑤は，$\log_3 n \leqq \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ となり，$n^2 \leqq \boxed{\text{ノハ}}$ と変形できる。よって，$m=\boxed{\text{ナ}}$ のとき，⑤を満たす自然数 n のとり得る値の範囲は $n \leqq \boxed{\text{ヒ}}$ である。したがって，$m=\boxed{\text{ナ}}$ の場合，④を満たす自然数 m，n の組の個数は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

同様にして，$m=\boxed{\text{ニ}}$ の場合，④を満たす自然数 m，n の組の個数は $\boxed{\text{フ}}$ である。

以上のことから，④を満たす自然数 m，n の組の個数は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。

第2問 (配点 30)

p を実数とし，$f(x)=x^3-px$ とする。

(1) 関数 $f(x)$ が極値をもつための p の条件を求めよう。$f(x)$ の導関数は，

$f'(x)=\boxed{\text{ア}}\,x^{\boxed{\text{イ}}}-p$ である。したがって，$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば，$\boxed{\text{ア}}\,a^{\boxed{\text{イ}}}-p=\boxed{\text{ウ}}$ が成り立つ。さらに，$x=a$ の前後での $f'(x)$ の符号の変化を考えることにより，p が条件 $\boxed{\text{エ}}$ を満たす場合は，$f(x)$ は必ず極値をもつことがわかる。$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $p=0$　① $p>0$　② $p\geqq 0$　③ $p<0$　④ $p\leqq 0$

(2) 関数 $f(x)$ が $x=\dfrac{p}{3}$ で極値をとるとする。また，曲線 $y=f(x)$ を C とし，C 上の点 $\left(\dfrac{p}{3},\ f\left(\dfrac{p}{3}\right)\right)$ をAとする。

$f(x)$ が $x=\dfrac{p}{3}$ で極値をとることから，$p=\boxed{\text{オ}}$ であり，$f(x)$ は $x=\boxed{\text{カキ}}$ で極大値をとり，$x=\boxed{\text{ク}}$ で極小値をとる。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

曲線Cの接線で，点Aを通り傾きが0でないものをℓとする。ℓの方程式を求めよう。ℓとCの接点のx座標をbとすると，ℓは点$(b,\ f(b))$におけるCの接線であるから，ℓの方程式はbを用いて

$$y = \left(\boxed{\text{ケ}}\,b^2 - \boxed{\text{コ}}\right)(x - b) + f(b)$$

と表すことができる。また，ℓは点Aを通るから，方程式

$$\boxed{\text{サ}}\,b^3 - \boxed{\text{シ}}\,b^2 + 1 = 0$$

を得る。この方程式を解くと，$b = \boxed{\text{ス}}$，$\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$であるが，$\ell$の傾きが0でないことから，$\ell$の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}x + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

点Aを頂点とし，原点を通る放物線をDとする。ℓとDで囲まれた図形のうち，不等式$x \geqq 0$の表す領域に含まれる部分の面積Sを求めよう。Dの方程式は

$$y = \boxed{\text{ニ}}\,x^2 - \boxed{\text{ヌ}}\,x$$

であるから，定積分を計算することにより，$S = \dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{24}$となる。

第３問 (配点　20)

関数 $y = \sin x - \cos 2x$ のグラフについて考えよう。ただし，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする。

(1)　まず，$y = \sin x - \cos 2x > 0$ となる x の範囲を求めよう。

三角関数の２倍角の公式を利用すれば

$$\sin x - \cos 2x = \boxed{\text{ア}}\sin^2 x + \sin x - \boxed{\text{イ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$= \left(\boxed{\text{ア}}\sin x - \boxed{\text{ウ}}\right)\left(\sin x + \boxed{\text{エ}}\right)$$

である。よって，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，$\sin x - \cos 2x = 0$ となる x の値は，小さい順に，$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$，$\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$ であることがわかる。また，$y = \sin x - \cos 2x > 0$ となる x の範囲は，$\boxed{\text{コ}}$ である。$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　$0 < x < \dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$

①　$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}} < x < \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$

②　$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi < x < \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$

③　$\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi < x < 2\pi$

(2)　次に，$y = \sin x - \cos 2x$ の最大値と最小値を求めよう。

①から

$$\sin x - \cos 2x = \boxed{\text{ア}}\left(\sin x + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\right)^2 - \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \quad \cdots ②$$

である。

(数学Ⅱ第３問は次ページに続く。)

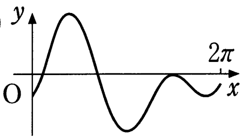
よって，②から，$y=\sin x-\cos 2x$ は，$x=\boxed{\text{ソ}}$ において最大値 $\boxed{\text{タ}}$ をとり，$x=\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ において最小値 $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ をとることがわかる。ただし，$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。$\boxed{\text{チ}}$ と $\boxed{\text{ツ}}$ は解答の順序を問わない。

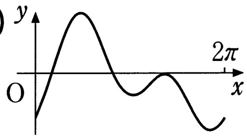
⓪ α　　① $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$　　② $\dfrac{\pi}{2}$　　③ $\dfrac{\pi}{2}+\alpha$　　④ $\pi-\alpha$

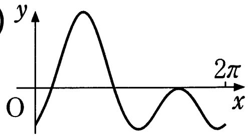
⑤ $\pi+\alpha$　　⑥ $\dfrac{3}{2}\pi-\alpha$　　⑦ $\dfrac{3}{2}\pi$　　⑧ $\dfrac{3}{2}\pi+\alpha$　　⑨ $2\pi-\alpha$

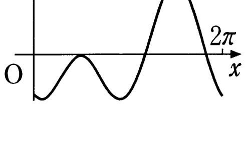
ここで，α は，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ を満たすものとする。

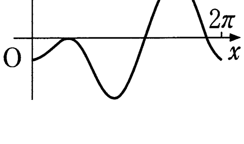
(3) 以上のことから，$0\leqq x\leqq 2\pi$ における関数 $y=\sin x-\cos 2x$ のグラフの概形として適切なものは $\boxed{\text{ニ}}$ であることがわかる。$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

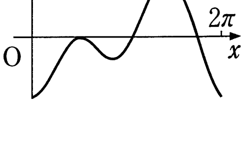
⓪


①


②


③


④


⑤


第4問 (配点 20)

c, d を実数とし，x についての 3 次式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^3 + cx^2 + dx + 2$$

で定める。$P(x)$ は，$P(-1) = 0$，$P(2) < -2$ を満たし，3 以上の自然数 n に対しては $P(n) \geqq 0$ であるとする。

$P(-1) = 0$ により

$$d = c + \boxed{\text{ア}}$$

となり，$P(x)$ は c を用いて

$$P(x) = (x+1)\left\{x^2 + \left(\boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}}\right)x + \boxed{\text{エ}}\right\} \qquad \cdots ①$$

と因数分解される。① を用いて，$P(2) < -2$ を c について解くと

$$c < -\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \qquad \cdots\cdots ②$$

となる。

また，n を 3 以上の自然数とするとき，不等式 $P(n) \geqq 0$ を c について解くと

$$c \geqq -\frac{\boxed{\text{キ}}}{n} + \boxed{\text{ク}} - n \qquad \cdots\cdots ③$$

となる。$n \geqq 3$ のとき，n の値が大きくなると，③ の右辺の値は小さくなる。したがって，② と ③ により，c のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \leqq c < -\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \qquad \cdots\cdots ④$$

となる。

(数学Ⅱ第 4 問は次ページに続く。)

3次関数 $y = P(x)$ のグラフを考えると，$P(0) = 2 > 0$ かつ $P(2) < 0$ であるから，方程式 $P(x) = 0$ は0と2の間に実数解 α をもつ。α のとり得る値の範囲を求めよう。

①により，この α は，2次方程式

$$x^2 + \left(\boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}}\right)x + \boxed{\text{エ}} = 0$$

の解である。この方程式の他の解を β とすると，解と係数の関係により，$\alpha + \beta$ は c を用いて

$$\alpha + \beta = \boxed{\text{サ}} - \boxed{\text{シ}}$$

と表される。したがって，④により

$$\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}} < \alpha + \beta \leqq \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \quad \cdots\cdots ⑤$$

が得られる。解と係数の関係により，$\alpha\beta = \boxed{\text{テ}}$ であり，また，$\alpha > 0$ であるから，⑤は

$$\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\alpha < \alpha^2 + \boxed{\text{テ}} \leqq \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\alpha$$

と変形できる。この不等式を α について解いて，$0 < \alpha < 2$ に注意すると，α のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \leqq \alpha < \frac{\boxed{\text{ニ}} - \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

であることがわかる。