工業数理基礎

（全　問　必　答）

第１問　〔解答記号 $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ス}$ 〕（配点　34）

以下の空欄 $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ス}$ に，それぞれの解答群から最も適当なものを選んでマークせよ。

問１　走行している自動車を停止させるためには，自動車の運動エネルギーを熱などに変換して制動させるブレーキが必要である。自動車が 24 m/s で走行中にブレーキをかけて停止しようとしている。図１のようにこの自動車がブレーキをかけ始めてから時間 t〔s〕の間に走行した距離を x〔m〕とし，$x = -2t^2 + 24t$ で表されるものとする。

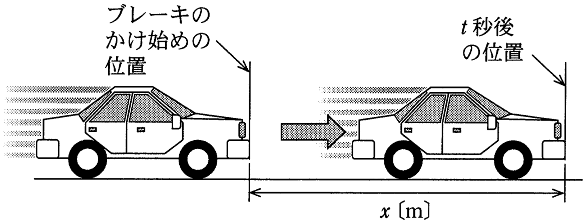


図　1

例えば，この自動車がブレーキをかけ始めてから４秒後の速度を求めてみる。自動車の速度を v〔m/s〕とすると，v は x を t で微分することで求めることができ，

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-2t^2 + 24t) = \boxed{ア}\,t + \boxed{イ} \qquad (1)$$

となる。４秒後の速度は，式(1)に $t = 4$ を代入すると $\boxed{ウ}$ m/s となる。また，加速度を a〔m/s^2〕とすると，a は式(1)をさらに t で微分することで求められ，

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\boxed{ア}\,t + \boxed{イ}\right) = \boxed{エ}$$

となる。次に，自動車がブレーキをかけ始めてから停止（速度 $v = 0$）するまでの時間とその間に走行した距離について考える。式(1)から，自動車がブレーキをかけ始めてから停止するまでの時間 t は $\boxed{オ}$ 秒と求まる。また，その間に自動車が走行した距離 x は $\boxed{カ}$ m となる。

いま，この自動車の質量を m〔kg〕とする。走行中の自動車の運動エネルギー E〔J〕は，自動車の質量 m と速度 v を用いた関係式

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

で表される。例えば質量 m を 1000 kg とし，速度 v が 24 m/s のとき，運動エネルギーは $\boxed{\text{キ}}$ kJ となる。走行中にブレーキをかけることで走行中の運動エネルギー E がすべて熱に変換され，そのうちの 23 % がブレーキの構成要素であるブレーキドラムと呼ばれる部品に吸収されたとする。ブレーキドラムが鋼鉄製でその質量を 1 kg，比熱を 0.46 kJ/(kg･℃)とすると，熱量 $\boxed{\text{キ}}$ kJ の 23 % がそれに吸収されることから，自動車が停止したときのブレーキドラムの温度は，$\boxed{\text{ク}}$ ℃上昇することになる。

ア ・ イ の解答群

⓪ −24	① −4	② −2	③ −1
④ 1	⑤ 2	⑥ 4	⑦ 24

ウ ・ エ の解答群

⓪ −12	① −6	② −4	③ 1
④ 2	⑤ 6	⑥ 8	⑦ 12

オ ・ カ の解答群

⓪ 4	① 6	② 8	③ 12
④ 32	⑤ 64	⑥ 72	⑦ 108

キ ・ ク の解答群

⓪ 23	① 24	② 36	③ 72
④ 144	⑤ 288	⑥ 576	⑦ 1000

工業数理基礎

問 2 図 2(a)のように，6 本の棒とワイヤからなる，底面が正六角形の六角すいが，平らな床面の上に置かれている。棒の長さはL〔m〕，棒と床面がなす角はθ〔rad〕である。六角すいの頂点に荷重F〔N〕が鉛直下向きに加わっているとき，底面のワイヤに働く張力T〔N〕を求めてみよう。ただし，棒の重さは考えないものとする。

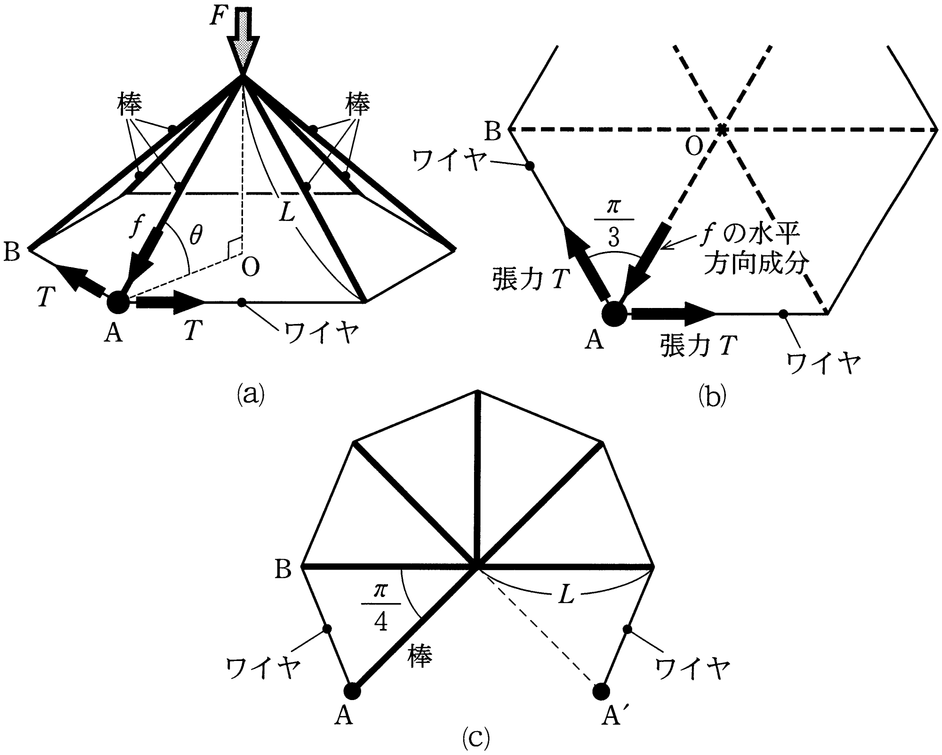


図 2

1 本の棒が受ける力の大きさf〔N〕の鉛直方向成分は，図 2(a)から $f \times$ **ケ** で表せる。荷重Fは，6 本の棒に作用するfの鉛直方向成分に均等に配分されるので次の関係が成り立つ。

$$F = 6f \times \boxed{\text{ケ}} \qquad (2)$$

図 2(b)に，六角すいを真上からみたときの点 A におけるfの水平方向成分と張力Tを示す。これらの力がつりあっていることから次式が導かれる。

$$T = f \times \boxed{\text{コ}} \qquad (3)$$

式(2)と式(3)からfを消去すると，張力Tを次式で表すことができる。

$$T = F \times \boxed{\text{サ}} \qquad (4)$$

次に，図2(a)の点Aの位置でワイヤを切断して六角すいを平面に展開したとき，図2(c)のように隣り合う棒間の角度が$\frac{\pi}{4}$となる場合に角度θを求めてみよう。

図2(a)の六角すい底面の正六角形の一辺の長さは，辺の両端と底面の中心Oを結んだ図形が図2(b)の△OABのように正三角形となるので，$\boxed{\text{シ}}$で表される。一方，図2(c)の隣り合う棒間のワイヤの長さ(図2(c)における点Aと点Bの間のワイヤの長さ)は，$\boxed{\text{ス}}$と求められる。$\boxed{\text{シ}} = \boxed{\text{ス}}$となることから角度$\theta$を求めることができ，度数法で表すと約40°となる。このことから式(4)のθに40°を代入することによって，Tが約0.2Fとなることもわかる。

$\boxed{\text{ケ}}$・$\boxed{\text{コ}}$の解答群

⓪ $\cos\theta$	① $\sin\theta$	② $\tan\theta$	③ $2\cos\theta$
④ $2\sin\theta$	⑤ $2\tan\theta$	⑥ $\frac{1}{\cos\theta}$	⑦ $\frac{1}{\tan\theta}$

$\boxed{\text{サ}}$の解答群

⓪ $\frac{\cos\theta}{6}$	① $\frac{\sin\theta}{6}$	② $\frac{\tan\theta}{6}$
③ $\frac{1}{6\cos\theta}$	④ $\frac{1}{6\sin\theta}$	⑤ $\frac{1}{6\tan\theta}$

$\boxed{\text{シ}}$の解答群

⓪ $L\cos\theta$	① $L\sin\theta$	② $L\tan\theta$	③ L

$\boxed{\text{ス}}$の解答群

⓪ $2L\cos\frac{\pi}{8}$	① $2L\sin\frac{\pi}{8}$
② $2L\tan\frac{\pi}{8}$	③ $\frac{1}{2L}\cos\frac{\pi}{8}$

工業数理基礎

第2問 〔解答記号 $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{セ}$〕(配点　33)

以下の空欄のうち，$\boxed{イ}$ ～ $\boxed{エ}$，$\boxed{カ}$・$\boxed{キ}$，$\boxed{ス}$・$\boxed{セ}$ には，それぞれの解答群から最も適当なものを選んでマークし，それ以外には，当てはまる数字をマークせよ。

2種類の製品X，Yを生産している工場がある。各製品を1個生産するのに必要な燃料の量，電力量，作業時間，および1個当たりの利益は表1のとおりである。

表　1

	燃料の量〔l〕	電力量〔kWh〕	作業時間〔分〕	利益〔千円〕
製品X	2	3	5	12
製品Y	5	4	3	20

燃料と電力の1日の使用可能量はそれぞれ300 l，310 kWhまで，1日の作業時間は8時間までという制限があるとき，1日の利益を最大にするような製品X，Yの生産個数を求めてみよう。

問 1　1日当たりの燃料と電力の使用可能量，および作業時間の制約について，製品X，Yの生産個数との関係を式で表して，図示してみよう。2種類の製品XとYについて，1日の生産個数をそれぞれx〔個〕，y〔個〕と表す。このとき，使用される燃料の量が$2x+5y$〔l〕であるのに対して燃料の使用可能量は300 l であるから，次の不等式(1)が成り立つ。

$$2x+5y \leqq 300 \qquad (1)$$

同様に，電力量と作業時間についてそれぞれ次の不等式(2)，(3)が成り立つ。

$$3x+4y \leqq 310 \qquad (2)$$

$$\boxed{ア}\,x+3y \leqq \boxed{イ} \qquad (3)$$

生産可能なxとyの組合せは，不等式(1)，(2)，(3)をすべて満たす必要があることから，例えば，製品Xを1日に70個生産する場合には，製品Yは1日に最大 $\boxed{ウ}$ 個までしか生産できない。

生産可能なxとyの組合せは，不等式(1)，(2)，(3)に，生産個数が0以上という条件を表す不等式

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$

を合わせた連立一次不等式を満たす。そして，この連立一次不等式の表す領域は図1の5点O，A，B，C，Dを頂点とする五角形の周とその内部である。

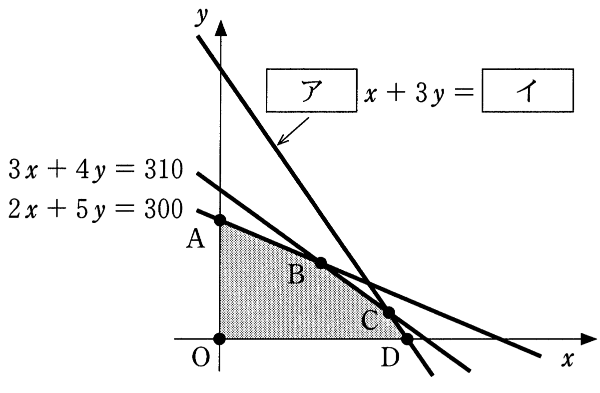


図　1

点Aは直線$2x + 5y = 300$とy軸の交点なので，点Aの座標は A$\left(0,\ \boxed{\text{エ}}\right)$である。このことから，製品Xを全く生産しない場合，製品Yは1日当たり最大 $\boxed{\text{エ}}$ 個まで生産可能であるといえる。

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪ 8	① 15	② 240
③ 320	④ 480	⑤ 600

$\boxed{\text{ウ}}$・$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ 20	① 25	② 32	③ 60
④ 72	⑤ 100	⑥ 150	⑦ 300

問 2 **問 1** の図 1 を利用して，1 日の利益を最大にするような製品X，Yの生産個数を求めてみよう。生産個数に対する利益が k〔千円〕であるという式

$$12x + 20y = k \qquad (4)$$

は，傾きが $-\dfrac{\boxed{オ}}{5}$，y 切片が $\dfrac{k}{20}$ の直線を表す。この直線(4)が，**問 1** で求めた連立一次不等式の表す領域 OABCD の，x 座標，y 座標ともに整数の点を通るときは，利益が k になるように製品X，Yを生産できるといえる。一方，図 2 では $k = 1600$ のとき直線(4)が領域 OABCD を通らないことが示されているが，このことから，1 日に 160 万円の利益を得るように製品X，Yを生産することはできないといえる。

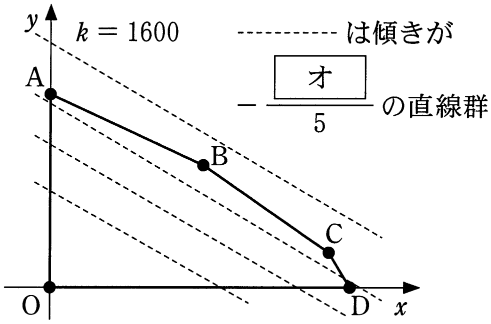


図　2

直線(4)の傾き $-\dfrac{\boxed{オ}}{5}$ は，直線 AB の傾き $-\dfrac{2}{5}$ より小さく直線 BC の傾き $-\dfrac{3}{4}$ より大きい。したがって，直線(4)が領域 OABCD を通るとき，k の値が最大になるのは直線(4)が点 B を通るときである。点 B は直線 AB と直線 BC の交点なので，

$$\begin{cases} 2x + 5y = 300 \\ 3x + 4y = 310 \end{cases}$$

を連立して解いて点Bの座標を求めると B$\left(\boxed{カ}, \boxed{キ}\right)$となる。$\boxed{カ}$ も $\boxed{キ}$ も整数であるから，製品Xを $\boxed{カ}$ 個，製品Yを $\boxed{キ}$ 個生産するとき利益は最大になり，このときの利益は $\boxed{クケコ}$ 万円である。

$\boxed{カ}$・$\boxed{キ}$ の解答群

⓪ 30　① 40　② 50　③ 60　④ 70　⑤ 80　⑥ 90

問 3　製品Xの1個当たりの利益は今後変化する可能性があるのに対して，製品Yの1個当たりの利益は当分変わらないと予想されている。そこで，製品Xの1個当たりの利益の変化に対応して，利益が最大になるような製品X，Yの1日の生産個数がどのように変化するのか調べてみよう。

製品Xの1個当たりの利益をR〔千円〕とおく。このとき，生産個数に対する利益がkであるという式は

$$Rx + 20y = k \tag{5}$$

と表すことができる。直線(5)の傾きは，$8 \leqq R$のとき直線ABの傾き$-\dfrac{2}{5}$以下になり，$R \leqq$ $\boxed{\text{サシ}}$ のとき直線BCの傾き$-\dfrac{3}{4}$以上になる。したがって，$8 \leqq R \leqq$ $\boxed{\text{サシ}}$ のときは，**問 2**で求めたように点Bに対応する個数を生産することによって利益は最大になる。

さらに，同様の考察と，点A，B，C，Dのx座標，y座標をそれぞれ求めるといずれも整数であることから，Rの値に応じて点A，B，C，Dに対応する個数を生産することによって利益を最大にできることが導ける。Rの範囲と点A，B，C，Dの関係は，次のようになる。

$$\begin{cases} R \leqq 8 \text{ のとき} & \text{点Aで利益を最大にできる} \\ 8 \leqq R \leqq \boxed{\text{サシ}} \text{ のとき} & \text{点Bで利益を最大にできる} \\ \boxed{\text{サシ}} \leqq R \leqq \dfrac{\boxed{\text{ア}} \times 20}{3} \text{ のとき} & \text{点Cで利益を最大にできる} \\ \dfrac{\boxed{\text{ア}} \times 20}{3} \leqq R \text{ のとき} & \text{点Dで利益を最大にできる} \end{cases}$$

このように，Rが変化すれば利益が最大になるような製品X，Yの生産個数も変化する。例えば，$R = 10$のときは点 $\boxed{\text{ス}}$ に対応する個数を，$R = 30$のときは点 $\boxed{\text{セ}}$ に対応する個数を生産することによって利益は最大になる。

$\boxed{\text{ス}}$ ・ $\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ A	① B	② C	③ D

工業数理基礎

第３問 〔解答記号 [ア] ～ [ソ] 〕(配点　33)

以下の空欄のうち，[エ] ～ [カ] には，それぞれの解答群から最も適当なものを選んでマークし，それ以外には，当てはまる数字をマークせよ。なお，円周率は3.14を用いよ。

問１　電気回路で頻繁に使用される「可変抵抗」(図１)について考えてみよう。

一般に，可変抵抗は図２に示されるように，円弧状の抵抗体，調整つまみ，結線針，および三つの端子(端子A～C)からなる。結線針の先端の位置を調整つまみによって動かすことで，端子間の抵抗の大きさを調整することができる。

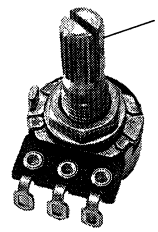


図　1

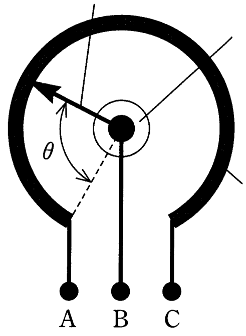


図　2

いま，抵抗体全体の円弧の中心角は300°であり，円弧の半径(結線針の長さ)は6.00 mmであるとする。このとき，円弧の長さ(抵抗体の全長)は [アイ] . [ウ] mmとなる。

調整つまみの回転角θ〔°〕を図２のように円弧の左端から結線針までの角度と定義する(θの範囲は$0° \leqq \theta \leqq 300°$となる)。また，使用している抵抗体の断面積は1.00 mm^{2}で一様であるとする。

一般に，抵抗R〔Ω〕は，抵抗体の長さL〔mm〕に比例し，断面積S〔mm^2〕に反比例する。この関係を，比例定数として抵抗率ρ〔Ω·mm〕を用いた式で表せば，

$$R = \boxed{\text{エ}} \qquad (1)$$

となる。

いま，抵抗体として$\rho = 19.1$ Ω·mmの炭素混合物が使われている場合について，θを変化させたときに各端子間の抵抗がどのように変化するのかを調べてみよう。ただし，結線針や端子の抵抗は無視できるものとする。

端子A－B間の抵抗 R_{AB}〔Ω〕を求めるために，端子Aにつながっている抵抗体の左端から，結線針の先端までの円弧の長さを θ を用いて表せば $\boxed{\text{オ}}$ mmとなる。この長さと抵抗体の断面積を式(1)に代入すれば，

$$R_{AB} = 2\theta \qquad (2)$$

と書ける。次に，抵抗体の全長と断面積を式(1)に代入すれば，抵抗の値は600 Ωと計算される。これを用い，端子B－C間の抵抗 R_{BC}〔Ω〕を求めれば，

$$R_{BC} = 600 - 2\theta \qquad (3)$$

と書ける。回転角 θ を横軸にとり，抵抗の値を縦軸にとって，式(2)，(3)を図示すると $\boxed{\text{カ}}$ のようになることがわかる。

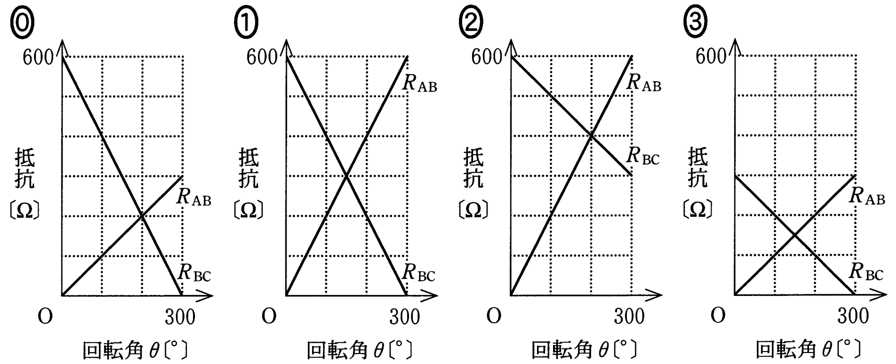
$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ ρLS　① $\rho \dfrac{L}{S}$　② $\rho \dfrac{S}{L}$　③ $\dfrac{\rho}{LS}$

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ $0.0523\,\theta$　① $0.0872\,\theta$　② $0.105\,\theta$　③ $0.126\,\theta$

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群



問 2 可変抵抗と検流計を組み合わせて，電位差計を作ることができる。**問 1** の可変抵抗と4.5 V の電池を用い，図 3 のような回路を組み立てた。

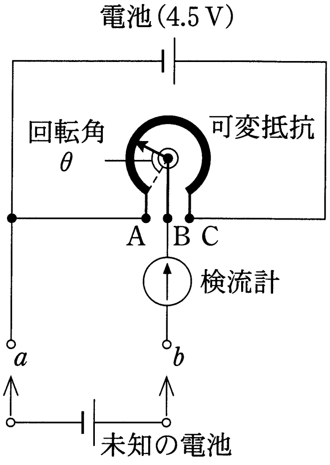


図　3

起電力が未知の電池を端子 $a-b$ 間に取り付けた後，可変抵抗の調整つまみの回転角 θ〔°〕を調整して，検流計に電流が流れない状態としたところ，θ は 86° となった。

このとき，可変抵抗の端子 A－B 間と B－C 間の電圧の比 V_{AB}〔V〕：V_{BC}〔V〕は，相当する抵抗の比 R_{AB}〔Ω〕：R_{BC}〔Ω〕と等しいので，この関係から，$V_{AB}+V_{BC}=4.5$ V に注意して，V_{BC} を消去すれば，

$$V_{AB}=\frac{R_{AB}}{R_{AB}+R_{BC}}\times 4.5$$

となる。これに，式(2)，(3)を代入し，

$$V_{AB}=\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{ク}}\times 10^{-2}\times\theta$$

が得られる。未知の電池の起電力は V_{AB} に等しく，θ が 86° であることから，$\boxed{\text{ケ}}.\boxed{\text{コ}}$ V と求まる。

問 3 可変抵抗の別の応用として，図 4 のように，二つの電気ヒータ（ヒータ 1， 2）を左右に取り付け，一つの可変抵抗で二つのヒータの発熱量を制御する回路を考えてみる。可変抵抗は**問 1** と同じものとし，直流電源の電

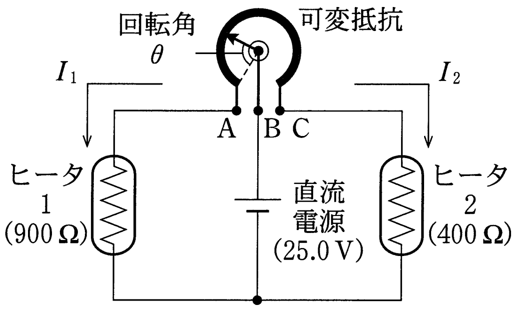


図　4

圧は25.0 V とする。ヒータ 1， 2 の抵抗はそれぞれ 900 Ω，400 Ω であり，ヒータの発熱量により変化しないものとする。また，それぞれの発熱量はそれぞれの抵抗における消費電力 P_1〔W〕，P_2〔W〕に比例するものとする。

ヒータ1，2を流れる電流I_1〔A〕，I_2〔A〕を可変抵抗の調整つまみの回転角θ〔°〕を用いて表せば，式(2)，(3)を使うことで，

$$I_1 = \frac{25}{2\theta + 900}, \quad I_2 = \frac{25}{1000 - 2\theta} \qquad (4)$$

と書け，θの範囲($0° \leqq \theta \leqq 300°$)で，$I_1$，$I_2$はともに正である。

また，(電力)＝(電圧)×(電流)＝(抵抗)×(電流の2乗)の関係から，

$$P_1 = 900\,I_1^2,\quad P_2 = 400\,I_2^2 \qquad (5)$$

と書ける。

ヒータ1，2の発熱量を等しくするθを求めてみよう。発熱量が消費電力に比例することに注意すれば，$P_1 = P_2$となり，これに式(5)を代入し，両辺の平方根をとれば，$30\,I_1 = 20\,I_2$となる。これに式(4)を代入して解けば，θは $\boxed{サシス}$ °となる。

次に，この回路全体の消費電力P_s〔W〕について考えてみると，電源電圧が25.0Vであり，回路を流れる電流が$I_1 + I_2$であるから，

$$\begin{aligned} P_s &= 25(I_1 + I_2) \\ &= \frac{25^2 \times 1900}{(2\theta + 900)(1000 - 2\theta)} \end{aligned} \qquad (6)$$

となる。P_sを最小にするθについて考えてみよう。そのために式(6)の分母を最大にするθを求めてみよう。そこで，分母を次式のように$F(\theta)$とおく。

$$F(\theta) = (2\theta + 900)(1000 - 2\theta) = -4\theta^2 + 200\theta + 900000$$

$F(\theta)$は上に凸の2次関数であり，θの範囲($0° \leqq \theta \leqq 300°$)に注意して，$F(\theta)$が最大となる$\theta$を求めれば， $\boxed{セソ}$ °が得られる。

このように，可変抵抗の調整つまみの回転角θによって，電気ヒータの発熱量や回路全体の消費電力を制御できることがわかる。実際に，可変抵抗は多くの電気回路に組み込まれ応用されている。