

「新教育課程履修者」は、選択できません。

旧数学Ⅱ・旧数学B

問 題	選 択 方 法
第1問	必 答
第2問	必 答
第3問	いずれか2問を選択し、 解答しなさい。
第4問	
第5問	
第6問	

第1問 (必答問題) (配点 30)

[1] Oを原点とする座標平面上の2点 $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$,
 $Q(2\cos\theta + \cos 7\theta, 2\sin\theta + \sin 7\theta)$ を考える。ただし、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$
 とする。

(1) $OP = \boxed{\text{ア}}$, $PQ = \boxed{\text{イ}}$ である。また

$$\begin{aligned} OQ^2 &= \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}} (\cos 7\theta \cos \theta + \sin 7\theta \sin \theta) \\ &= \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}} \cos(\boxed{\text{オ}} \theta) \end{aligned}$$

である。

よって、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、OQは $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき最大値

$\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ をとる。

(旧数学Ⅱ・旧数学B第1問は次ページに続く。)

旧数学Ⅱ・旧数学B

(2) 3点O, P, Qが一直線上にあるような θ の値を求めよう。

直線OPを表す方程式は である。 に当てはまるものを、次の①~③のうちから一つ選べ。

① $(\cos \theta)x + (\sin \theta)y = 0$

② $(\sin \theta)x + (\cos \theta)y = 0$

③ $(\cos \theta)x - (\sin \theta)y = 0$

④ $(\sin \theta)x - (\cos \theta)y = 0$

このことにより、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、3点O, P, Qが一直線上にあるのは $\theta = \frac{\pi}{\text{ケ}}$ のときであることがわかる。

(3) $\angle OQP$ が直角となるのは $OQ = \sqrt{\text{コ}}$ のときである。したがっ

て、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、 $\angle OQP$ が直角となるのは $\theta = \frac{\text{サ}}{\text{シ}}\pi$

のときである。

(旧数学Ⅱ・旧数学B第1問は次ページに続く。)

旧数学Ⅱ・旧数学B

〔2〕 a, b を正の実数とする。連立方程式

$$(*) \begin{cases} x\sqrt{y^3} = a \\ \sqrt[3]{x}y = b \end{cases}$$

を満たす正の実数 x, y について考えよう。

(1) 連立方程式(*)を満たす正の実数 x, y は

$$x = a \boxed{\text{ス}} b \boxed{\text{セソ}}, \quad y = a^p b \boxed{\text{タ}}$$

となる。ただし

$$p = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

(旧数学Ⅱ・旧数学B第1問は次ページに続く。)

旧数学Ⅱ・旧数学B

- (2) $b = 2\sqrt[3]{a^4}$ とする。 a が $a > 0$ の範囲を動くとき、連立方程式(*)を満たす正の実数 x, y について、 $x + y$ の最小値を求めよう。

$b = 2\sqrt[3]{a^4}$ であるから、(*)を満たす正の実数 x, y は、 a を用いて

$$x = 2 \boxed{\text{セ}} a \boxed{\text{ト}}, \quad y = 2 \boxed{\text{タ}} a \boxed{\text{ニ}}$$

と表される。したがって、相加平均と相乗平均の関係を利用すると、

$x + y$ は $a = 2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ をとることがわかる。ただし

$$q = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である。

旧数学Ⅱ・旧数学B

第2問 (必答問題) (配点 30)

- (1) 関数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ を求めよう。 h が 0 でないとき、 x が a から $a + h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率は

$$\boxed{\text{ア}} + \frac{h}{\boxed{\text{イ}}}$$

である。したがって、求める微分係数は

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow \boxed{\text{ウ}}} \left(\boxed{\text{ア}} + \frac{h}{\boxed{\text{イ}}} \right) = \boxed{\text{エ}}$$

である。

- (2) 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ を C とし、 C 上に点 $P(a, \frac{1}{2}a^2)$ をとる。ただし、 $a > 0$ とする。点 P における C の接線 l の方程式は

$$y = \boxed{\text{オ}}x - \frac{1}{\boxed{\text{カ}}}a^2$$

である。直線 l と x 軸との交点 Q の座標は $\left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}, 0 \right)$ である。点 Q を

通り l に垂直な直線を m とすると、 m の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}x + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

(旧数学Ⅱ・旧数学B第2問は次ページに続く。)

旧数学Ⅱ・旧数学B

直線 m と y 軸との交点を A とする。三角形 APQ の面積を S とおくと

$$S = \frac{a(a^2 + \boxed{\text{セ}})}{\boxed{\text{ソ}}}$$

となる。また、 y 軸と線分 AP および曲線 C によって囲まれた図形の面積を T とおくと

$$T = \frac{a(a^2 + \boxed{\text{タ}})}{\boxed{\text{チツ}}}$$

となる。

$a > 0$ の範囲における $S - T$ の値について調べよう。

$$S - T = \frac{a(a^2 - \boxed{\text{テ}})}{\boxed{\text{トナ}}}$$

である。 $a > 0$ であるから、 $S - T > 0$ となるような a のとり得る値の範囲は $a > \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ である。また、 $a > 0$ のときの $S - T$ の増減を調べると、

$S - T$ は $a = \boxed{\text{ヌ}}$ で最小値 $\frac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ をとることがわかる。

第3問 (選択問題) (配点 20)

自然数 n に対し、 2^n の一の位の数 a_n とする。また、数列 $\{b_n\}$ は

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たすとする。

- (1) $a_1 = 2$, $a_2 = \boxed{\text{ア}}$, $a_3 = \boxed{\text{イ}}$, $a_4 = \boxed{\text{ウ}}$, $a_5 = \boxed{\text{エ}}$ である。このことから、すべての自然数 n に対して、 $a_{\boxed{\text{オ}}} = a_n$ となることがわかる。
 $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを、次の①～④のうちから一つ選べ。

- ① $5n$ ② $4n + 1$ ③ $n + 3$ ④ $n + 4$ ⑤ $n + 5$

- (2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。① を繰り返し用いることにより

$$b_{n+4} = \frac{a_{n+3} a_{n+2} a_{n+1} a_n}{2^{\boxed{\text{カ}}}} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことがわかる。ここで、 $a_{n+3} a_{n+2} a_{n+1} a_n = 3 \cdot 2^{\boxed{\text{キ}}}$ であること

から、 $b_{n+4} = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} b_n$ が成り立つ。このことから、自然数 k に対して

$$b_{4k-3} = \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}, \quad b_{4k-2} = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}$$

$$b_{4k-1} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}, \quad b_{4k} = \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}$$

である。

(旧数学Ⅱ・旧数学B第3問は次ページに続く。)

旧数学Ⅱ・旧数学B

(3) $S_n = \sum_{j=1}^n b_j$ とおく。自然数 m に対して

$$S_{4m} = \boxed{\text{タ}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^m - \boxed{\text{チ}}$$

である。

(4) 積 $b_1 b_2 \cdots b_n$ を T_n とおく。自然数 k に対して

$$b_{4k-3} b_{4k-2} b_{4k-1} b_{4k} = \frac{1}{\boxed{\text{ツ}}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{\boxed{\text{テ}}^{(k-1)}}$$

であることから、自然数 m に対して

$$T_{4m} = \frac{1}{\boxed{\text{ツ}}^m} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{\boxed{\text{ト}}^{m^2} - \boxed{\text{ナ}}^m}$$

である。また、 T_{10} を計算すると、 $T_{10} = \frac{3^{\boxed{\text{ニ}}}}{2^{\boxed{\text{ヌネ}}}}$ である。

第4問 (選択問題) (配点 20)

1辺の長さが1のひし形OABCにおいて、 $\angle AOC = 120^\circ$ とする。辺ABを2:1に内分する点をPとし、直線BC上に点Qを $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$ となるようにとる。以下、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。

(1) 三角形OPQの面積を求めよう。 $\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}} \vec{b}$ である。実

数 t を用いて $\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$ と表されるので、 $\overrightarrow{OQ} = \boxed{\text{エ}} t\vec{a} + \vec{b}$

である。ここで、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ 、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \boxed{\text{キ}}$ であることから、

$t = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

これらのことから、 $|\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ 、 $|\overrightarrow{OQ}| = \frac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

よって、三角形OPQの面積 S_1 は、 $S_1 = \frac{\boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。

(旧数学Ⅱ・旧数学B第4問は次ページに続く。)

旧数学Ⅱ・旧数学B

- (2) 辺BCを1:3に内分する点をRとし、直線ORと直線PQとの交点をTとする。 \vec{OT} を \vec{a} と \vec{b} を用いて表し、三角形OPQと三角形PRTの面積比を求めよう。

Tは直線OR上の点であり、直線PQ上の点でもあるので、実数 r, s を用いて

$$\vec{OT} = r\vec{OR} = (1-s)\vec{OP} + s\vec{OQ}$$

と表すと、 $r = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ 、 $s = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ となることがわかる。よって、

$$\vec{OT} = \frac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}} \vec{b} \text{である。}$$

上で求めた r, s の値から、三角形OPQの面積 S_1 と、三角形PRTの面積 S_2 との比は、 $S_1 : S_2 = \boxed{\text{ヘホ}} : 2$ である。

旧数学Ⅱ・旧数学B 第3問～第6問は、いずれか2問を選択し、解答しなさい。

第5問 (選択問題) (配点 20)

次の表は、あるクラスの生徒20人に対して行われた英語と数学のテスト(各50点満点)の得点をまとめたものである。英語の得点を変数 x 、数学の得点を変数 y で表し、 x の平均値を \bar{x} 、 y の平均値を \bar{y} で表す。ただし、テストの得点は整数値である。また、表の数値はすべて正確な値であり、四捨五入されていないものとする。

番号	x	y	$(x - \bar{x})^2$	$y - \bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
1	42	18	81.0	1.0	1.0	9.0
2	49	16	256.0	-1.0	1.0	-16.0
3	44	23	121.0	6.0	36.0	66.0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
18	39	18	36.0	1.0	1.0	6.0
19	30	10	9.0	-7.0	49.0	21.0
20	32	20	1.0	3.0	9.0	-3.0
合計	660	A	2000.0	B	500.0	353.0

以下、小数の形で解答する場合、指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入し、解答せよ。途中で割り切れた場合、指定された桁まで○にマークすること。

(旧数学Ⅱ・旧数学B第5問は次ページに続く。)

旧数学Ⅱ・旧数学B

- (1) 変数 x の平均値 \bar{x} は . 点である。
- (2) 変数 y の平均値 \bar{y} は . 点である。したがって、変数 y の合計Aの値は である。また、合計Bの値は . である。
- (3) 変数 x と変数 y の相関係数の値は . である。

(旧数学Ⅱ・旧数学B第5問は次ページに続く。)

旧数学Ⅱ・旧数学B

- (4) さらに、変数 x と変数 y の値をそれぞれ 10 ずつの区間に区切って、次の表を作成した。たとえば、変数 x の値が 30 以上 40 未満で変数 y の値が 20 以上 30 未満である度数は 4 である。

$x \backslash y$	0 以上 10 未満	10 以上 20 未満	20 以上 30 未満	30 以上 40 未満	40 以上 50 以下
0 以上 10 未満	0	0	0	0	0
10 以上 20 未満	1	1	1	0	0
20 以上 30 未満	0	C	1	0	0
30 以上 40 未満	0	D	4	0	0
40 以上 50 以下	1	3	2	0	0

ここで、変数 x の値が 20 以上で変数 y の値が 10 以上である度数は 16 であり、変数 x の値が 30 未満で変数 y の値が 30 未満である度数は 8 である。このことから、表中の C の値は であり、D の値は である。

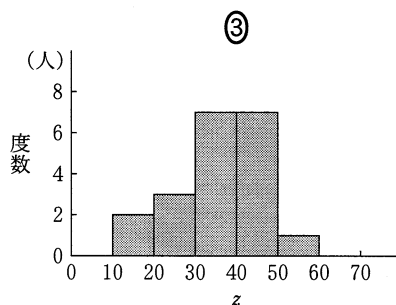
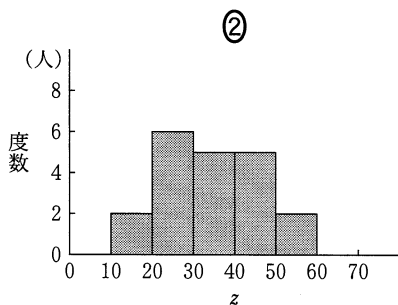
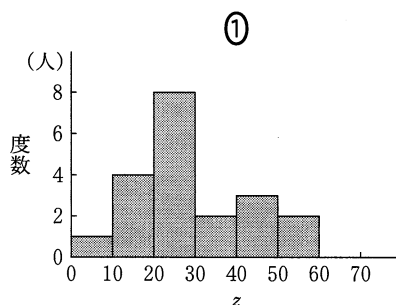
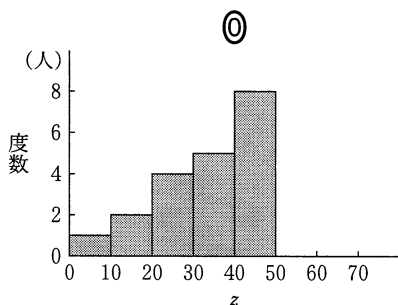
(旧数学Ⅱ・旧数学B第5問は次ページに続く。)

旧数学Ⅱ・旧数学B

(5) 新しい変量 w を $w = x + 50$ により定める。このとき、変量 w の平均値は

. である。

次に、新しい変量 z を $z = 2y$ により定める。このとき、変量 z の分散の値は . である。また、変量 z のヒストグラムとして、最も適切なものは である。 に当てはまるものを、次の①~④のうちから一つ選べ。



ここで、変量 x と変量 y の相関係数の値を r_1 、変量 w と変量 z の相関係数の値を r_2 とすると、 の関係がある。 に当てはまるものを、次の①~④のうちから一つ選べ。

- ① $r_2 = \frac{r_1}{4}$ ② $r_2 = \frac{r_1}{2}$ ③ $r_2 = r_1$ ④ $r_2 = 2r_1$ ⑤ $r_2 = 4r_1$

第6問 (選択問題) (配点 20)

(1) 自然数 M, N は $M > N$ であり、最大公約数が1であるとする。このとき、分数 $\frac{M}{N}$ に対して、次の(i)～(iii)の手順を考える。

- (i) M を N で割ったときの商を Q 、余りを R とする。
- (ii) $R > 0$ ならば M に N の値を代入し、次に N に R の値を代入して(i)に戻る。
- (iii) $R = 0$ ならば終了する。

この手順は、繰り返しのたびに R が小さくなり、何回かの後に必ず $R = 0$ となって終了する。そこで、 $R = 0$ となるまでに(i)が実行された回数を K とし、(i)に現れる (M, N, Q, R) を実行順に、 $(M_1, N_1, Q_1, R_1), (M_2, N_2, Q_2, R_2), \dots, (M_K, N_K, Q_K, R_K)$ と表す。このようにして得られる商の列 Q_1, Q_2, \dots, Q_K について考えてみよう。

たとえば、分数 $\frac{10}{7}$ の場合には(i)～(iii)の手順により、商の列 1, 2, 3 が得られる。

$$\begin{array}{llll}
 M_1 = 10, & N_1 = 7, & Q_1 = 1, & R_1 = \boxed{\text{ア}} \\
 M_2 = 7, & N_2 = \boxed{\text{ア}}, & Q_2 = 2, & R_2 = 1 \\
 M_3 = \boxed{\text{ア}}, & N_3 = 1, & Q_3 = 3, & R_3 = \boxed{\text{イ}}
 \end{array}$$

また、商の列 1, 2, 3 を用いて、 $\frac{10}{7}$ は次のように表すことができる。

$$\frac{10}{7} = \frac{M_1}{N_1} = Q_1 + \frac{N_2}{M_2} = Q_1 + \frac{1}{Q_2 + \frac{N_3}{M_3}} = Q_1 + \frac{1}{Q_2 + \frac{1}{Q_3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$$

(旧数学Ⅱ・旧数学B第6問は次ページに続く。)

旧数学Ⅱ・旧数学B

この手順にしたがって、自然数 M , N を入力して、分数 $\frac{M}{N}$ に対応する商の列 Q_1, Q_2, \dots, Q_K を求めるための〔プログラム1〕を作成した。ただし、 $\text{INT}(X)$ は X を超えない最大の整数を表す関数である。

〔プログラム1〕

```

100 INPUT M
110 INPUT N
120 LET Q=INT(M/N)
130 PRINT Q
140 LET R= 
150 LET M=N
160 LET N= 
170 IF R>0 THEN GOTO 120
180 END
    
```

〔プログラム1〕の , に当てはまるものを、次の①～⑦のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを選んでよい。

- | | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| ① 0 | ② 1 | ③ Q | ④ R |
| ⑤ M-Q*N | ⑥ M-R*N | ⑦ N-Q*M | ⑧ N-R*M |

〔プログラム1〕を実行して変数 M に 47, 変数 N に 10 を入力し、分数 $\frac{47}{10}$ に対応する商の列を求めた。130 行で出力される変数 Q の値は順に 4, 1, , であり、150 行が 3 回実行された直後の変数 M の値は である。

(旧数学Ⅱ・旧数学B第6問は次ページに続く。)

旧数学Ⅱ・旧数学B

(2) K 個の商の列 Q_K, Q_{K-1}, \dots, Q_1 を順に入力し、最後に入力の終了を表す 0 を入力して、対応する分数を求めるための〔プログラム 2〕を作成した。

たとえば、〔プログラム 2〕を実行して、変数 Q に , , 1, 4, 0 と順に入力すれば、180 行で分数 $47/10$ が出力される。

〔プログラム 2〕

```
100 LET M=1
110 LET N=0
120 INPUT Q
130 IF Q=0 THEN GOTO 180
140 LET R=
150 LET N=M
160 LET M=
170 GOTO 120
180 PRINT M;"/" ;N
190 END
```

(旧数学Ⅱ・旧数学B第6問は次ページに続く。)

旧数学Ⅱ・旧数学B

〔プログラム2〕の , に当てはまるものを、次の①~⑦のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを選んでもよい。

- | | | | |
|-----|-----|-----------|-----------|
| ① 0 | ② 1 | ③ M | ④ N |
| ⑤ Q | ⑥ R | ⑦ $Q*N+R$ | ⑧ $R*N+Q$ |

〔プログラム2〕を実行して、変数Qに2, 3, 1, 5, 0と順に入力すれば、180行で出力される分数は / である。このとき、150行が3回実行された直後の変数Nの値は である。